MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR, CIENCIA Y TECNOLOGIA

MATEMÁTICA

CURSO DE NIVELACIÓN

Prueba de Oritentación y Medición Académica

Santo Domingo, D. N.,
Enero 2013

MATEMÁTICA
Curso de Nivelación

Autores:

Lic. Héctor Antonio Sandoval -MESCYT
Lic. Cristino Castillo -UASD
Lic. Pascual Leocadio - ISSA
Ing. Vidal Rodríguez del Carmen - O & M
Lic. Carlos Ruiz Matuk - MESCYT
Dr. José Vicente Díaz - Universidad de Valencia

Corrección de Estilo:

Lic. Luz Almánzar R.

Diagramación:

Rosa María López A.

Impresión:

3era. Edición, Enero 2013

ISBN: 978-9945-8804-6-5

Ministerio de Educación Superior, Ciencia y Tecnología
MESCyT

Ligia Amada Melo de Cardona, M.A.
Ministra de Educación Superior, Ciencia y Tecnología

Dr. Rafael González
Viceministro de Educación Superior

Dr. Plácido Gómez
Viceministro de Ciencia y Tecnología

Dr. Rafael Augusto Sánchez C.
Viceministro de Asuntos Interinstitucionales e Internacionales

Presentación

El Ministerio de Educación Superior, Ciencia y Tecnología se complace en presentar el libro "Matemática, Curso de Nivelación" El mismo forma parte del proyecto que inició el MESCyT en el año 2002, a través de la aplicación de la Prueba de Orientación y Medición Académica, POMA.

La Prueba POMA fue concebida como parte integral de la Ley 139-01, por lo que, su aplicación y continuidad como proyecto es de gran importancia para elevar la calidad de los egresados de la educación superior, ya que, al evaluar la inteligencia académica del estudiantado dominicano, se sientan las bases de la plataforma que conlleve a una mejor calidad del sistema educativo.

El libro ha sido elaborado por profesores universitarios que están involucrados en el proyecto POMA, lidereados por el Subsecretario de Estado del MESCyT, Lic. Héctor Antonio Sandoval, para ser aplicado en los cursos remediales que se ofrecen en las instituciones de educación superior con la finalidad de superar las fallas detectadas a través de las Pruebas de Orientación y Medición Académica. El mismo forma parte del Programa Nacional de Libros de Texto que lleva a cabo este Ministerio, en la Serie Investigaciones, volúmen 4, de la Colección Humanidades.

A través del desarrollo de los contenidos del libro Matemática, Curso de Nivelación, se trabajan, con ejercicios variados, aquellos temas de la matemática que le han presentado más dificultades a los estudiantes en sus años de bachillerato. Por lo que sus objetivos principales son:

* Identificar las habilidades adecuadas de acuerdo a la Prueba POMA.
* Poner en práctica los contenidos de forma clara y significativa para los estudiantes.
* Evaluar las habilidades cognoscitivas de los jóvenes antes, durante y después de poner en práctica el libro.

Con la distribución y uso de este libro, el MESCyT mantiene el esfuerzo para hacer más competitivo todo el Sistema de Educación Superior para formar una juventud con las capacidades para producir, crear y aportar soluciones que conlleven a engrandecer cada vez más nuestro país.

Ligia Amada Melo de Cardona, M.A.
Ministra de Educación Superior, Ciencia y Tecnología

CONTENIDO

UNIDADES:

Marco teórico para el curso universitario de nivelación en Matemáticas

"La matemática casi nunca resulta fácil para nadie. Y casi toda persona puede aprender incluso el más complejo de los conceptos matemáticos, si es perseverante y si los conceptos le son bien enseñados." (Aron & Aron, 2001, pág. 28).

Introducción

El programa de nivelación propuesto por el Ministerio de Educación Superior Ciencia y Tecnología se concibe como un programa incorporado al currículo para mejorar las habilidades del pensamiento de solucionar problemas, los cuales se centran en el desarrollo de las habilidades cognoscitivas en el contexto de un área de contenidos concreta que, en este caso son las áreas de matemáticas.

En este programa están incluidos tres objetivos que han sido propuestos para garantizar el éxito de los mismos

1) Identificar las habilidades adecuadas, asumiendo modelos prescriptivos a partir de las evaluaciones con la Prueba de Orientación y Medición Académica, POMA (tercera versión).

2) Poner en práctica la instrucción en una secuencia clara y significativa que el profesor debe identificar y modelar para los alumnos aplicando las prescripciones del Programa de Enriquecimiento Instrumental (PEI) y las orientaciones del proyecto PISA (Programme for International Student Assessment), además de otros programas de enseñanza del pensamiento.

3) Y hacer una valuación de las habilidades cognoscitivas antes, durante y después de ponerlo en práctica.

El marco teórico de este curso se ha construido, de acuerdo a la opinión de los miembros de la Comisión de Matemáticas constituida el 6 de octubre de 2008 en la MESCyT, sobre los conceptos vertidos en las siguientes secciones:

1º Determinación del dominio de conocimientos de este curso de nivelación

El total de conceptos a tratar en los cursos de nivelación en Matemáticas, de acuerdo a la propuesta de la Comisión que ha trabajo en esta disciplina, se han agrupado en seis clases de contenidos:

I.- Teoría de los conjuntos.
II.- Sistemas numerales y destrezas en el cálculo de operaciones aritméticas.
III.- Introducción a los sistemas de medidas.
IV.- Capacidad para manejar expresiones algebraicas.
V.- Material de Geometría.
VI.- Conceptos elementales de Estadística.

2º Objetivos y/o competencias a alcanzar y competencias educativas a enriquecer en el curso universitario de nivelación en Matemáticas

Este curso es uno de los intentos que se han realizado en el mundo de reinventar las matemáticas dentro de un marco cognitivo y socioconstructivista. La perspectiva en la que se centra este curso hace hincapié en ayudar al alumno a comprender las matemáticas. De esta forma, se inculca en el estudiante la importancia de formular conjeturas, explorar patrones y buscar soluciones a problemas capacitándolos para interpretar datos cuantitativos y utilizar las matemáticas en la vida diaria. Esta perspectiva enfatiza mas el desarrollo del proceso de solución de los problemas matemáticos más que el dominio de las operaciones matemáticas.

2.1 Objetivo general

El objetivo general de los cursos de nivelación está basado en el proyecto PISA de la OCDE, (PISA, 2006) **que enfatiza el desarrollo de conocimientos, destrezas y actitudes o sentimientos, habilitando a los estudiantes, para ejercer la capacidad de reflexión y aplicación de sus conocimientos y experiencias en la solución de los problemas de la vida real.**

2.2 Objetivos específicos

Estimular el ***desarrollo de conocimientos*** sobre *conceptos matemáticos, hechos, signos, símbolos, la estructura de los números, procedimientos para resolver problemas,* etc.
Desarrollar ***destrezas mentales*** tales como: *clasificación, ordenamiento en secuencias, manejo de estructuras espaciales, razonamiento, flexibilidad mental, solución de problemas, etc*.
En los aspectos del ***desarrollo de actitudes y sentimientos*** se pretende estimular a los alumnos a acrecentar *la seguridad en sí mismo, la curiosidad intelectual, un sentimiento de interés por lo novedoso y complejo, el sentido de relevancia de los datos, el deseo de profundización en la comprensión de ciertos conocimientos, y la perseverancia en la solución de situaciones problemáticas a través de aplicaciones matemáticas*.

3º Sistematización de procesos o competencias intelectivas a desarrollar en el programa del curso de nivelación en Matemáticas

Un buen uso de los *procesos mentales en las matemáticas*, implica un desarrollo adecuado de un conjunto de actividades mentales, que exigen del sujeto las siguientes competencias:

- *un empleo adecuado del lenguaje matemático,*
- *la capacidad de crear modelos que permitan explicar la realidad*
- *y un conjunto de habilidades relacionadas con la resolución de problemas*.

Este conjunto de actividades mentales suele denominarse, como el *proceso de matematización, que permite al alumno ejecutar un conjunto de pasos en la resolución de los problemas y formular preguntas planteadas sobre los mismos*. Este proceso de matematización, implica señalar una serie de pasos que indiquen el camino en resolución de problemas matemáticos.

Estos serían los pasos a dar:

3.1 Este proceso se inicia con la presentación de un problema concreto, en el que se debe proceder primero a estudiarlo: esto es, conocerlo y delimitar los datos.

3.2 A continuación se debe proceder a organizar el problema de acuerdo a conceptos matemáticos, así como a identificar los datos más relevantes.

3.3 Para pasar, luego, a realizar una abstracción de la realidad, paso que implica efectuar estas actividades:
- *identificar los elementos* matemáticos pertinentes en el problema real,
- *representar el problema* de un modo distinto que conlleva,
- *organizar* el mismo de acuerdo a los conceptos matemáticos más ajustables al caso: aritmético, algebraico, gráfico, tablas, mapas, ...
- *plantear los supuestos* adecuados al caso,
- *comprender las relaciones existentes* entre el lenguaje del problema y los símbolos que se necesitan para: comprenderlo, encontrar regularidades, relaciones y hasta patrones en su desarrollo
- y finalmente reconocer los aspectos que son isomórficos a otros problemas…

3.4. Traducir el problema a términos matemáticos dentro del modelo adoptado: aritmético, algebraico, gráfico, tablas, mapas, ..

3.5 Resolver el problema matemáticamente,

3.6 Intentar luego:
- *contestar preguntas varias referentes al desarrollo del modelo y su adaptación al caso,*
- *establecer regularidades,*
- *identificar las conexiones*
- *crear una buena argumentación matemática*
- *finalmente generalizar el caso*

3.7 Reflexionar sobre:
- *la comprensión del alcance y limitaciones de los conocimientos matemáticos,*
- *las argumentaciones matemáticas,*
- *las aplicaciones y justificación de los resultados,*
- *la concienciación de los pasos del problema,*
- *las críticas del método utilizado y sus limitaciones,..*

*3.8. Sistematización de las situaciones: es decir ajustar las **habilidades, destrezas y actitudes y/o sentimientos** desarrollados a todas las situaciones vitales de los alumnos, que se podrían organizar de acuerdo al grado de proximidad al alumno, como: personales, educativas, profesionales, públicas, científicas, …*

4º Resultados del diagnóstico dinámico de Matemáticas en el POMA.3

Se ha dicho antes que los fundamentos teóricos de este curso de nivelación se han centrado en las directrices del proyecto PISA,2006, en las orientaciones del EAM del PEI y en los resultados del diagnóstico dinámico del POMA.3.

Resultados que se basan sobre el procesamiento de datos obtenidos a través del POMA. 3 de una muestra de 6.190 estudiantes que solicitaron ingresar en las dominicanas para el curso 2007-2008, de los cuales 4.028 correspondían a la UASD. Los resultados del análisis de los ítems correspondientes a la sub prueba verbal (CM) se presentan en la tabla siguiente que tiene las siguientes columnas:

Ítems: numeración del ítem en la sub prueba CM
Cod: código que se le ha asignado de acuerdo el modelo de procesamiento en el banco de ítems
b: valor del parámetro de dificultad en la TRI
a: valor del parámetro de discriminación en la TRI
c: valor del parámetro del acierto por el azar en la TRI
Respuestas Alternativas para cada una de las opciones **(A,B,C,D)**
Coeficientes Alter: valores del coeficiente de consistencia interna en alternativas.

Tabla II.1
Resultados del análisis de ítems hechos por el TRI

Items	Cod	b	a	c	R		% Respuestas Alter.						Coeficientes Alter				
21	IMA.4	-0,62	0,47	0,22	0,86		6	70~	9	14	1		-17	30~	-17	-12	-5
22	IMA.2	-0,49	0,57	0,21	0,34		5	12	68~	12	2		-16	-22	37~	-18	-5
23	IMP.1	-1,06	0,59	0,22	0,61		7	77~	7	7	2		-21	37~	-19	-16	-8
24	IMP.2	-1	0,44	0,22	0,72		8	5	73~	13	1		-13	-21	29~	-12	-8
25	IMR.3	0,23	0,64	0,24	0,87		59~	17	10	12	3		35~	-18	-18	-12	-7
26	IMD.6	2,02	0,69	0,23	0,5		12	41	34~	11	3		-8	-7	16~	-1	-8
27	IMA.3	2,79	0,67	0,3	1,68		24	25	12	35~	4		-2	-1	-2	6~	-4
28	**IMR.1**	**1,61**	**0,47**	**0,23**	**0,98**		**14**	**25**	**17**	**42~**	**3**		**-6**	**-5**	**-11**	**20~**	**11**
29	IMA.3	1,06	0,83	0,23	1,02		15	18	21	43~	3		-13	-12	-11	31~	-8
30	IMD.7	2,33	1,04	0,14	1,14		45	28	18~	8	2		5	-14	13~	0	-7
31	IMA.3	0,72	0,93	0,25	1,04		11	18	50~	18	3		-14	-17	36~	-15	-9
32	IMD.7	2,65	0,24	0,25	3,22	K	7	21	24	45~	3		-18	-7	15	7~	14
33	IMD.3	1,81	0,94	0,16	1,05		18	20	25~	34	3		-15	-6	23~	0	11
34	IMP.2	3	0,81	0,2	1,62	K	22~	31	25	17	6		1~	3	-2	1	-6
35	IMP.2	3	0,7	0,19	0,8	K	11	33	21~	30	5		-4	-4	6~	4	-6

Para apreciar las carencias que esta muestra de estudiantes presenta en el área de conocimientos de matemáticas nos fijaremos en valores del parámetro b y los % de respuestas de la clave o respuesta buena y los coeficientes de consistencia interna (ri-tri ó ri-tct). Para una mejor comprensión de estas carencias se han agrupado los ítems en cada uno de los procesos que intenta medir el POMA.3:.

Proceso A: Asimilación de conocimientos básicos e instrumentales en matemáticas

Muestra UASD (N=4028) Muestra total (N=6190)

Item	b	P	ri-tri	ri-tct		b	P	ri-tri	ri-tct	Comportamiento evaluado
22	-0,49	68~	37~	42		-0,38	69~	45~	47	IMA.2: aritmética
27	2,79	35~	6~	26		1,81	37~	14~	32	IMA.3: álgebra
29	1,06	43~	31~	50		0,8	45~	40~	50	IMA.3: álgebra
31	0,72	50~	36~	43		0,6	51~	43~	50	IMA.3: álgebra
21	-0,62	70~	30~	37		-0,41	70~	35~	39	IMA.4: geometría

Proceso D: dominio de destrezas académicas en matemáticas

Muestra UASD (N=4028) Muestra total (N=6190)

Item	b	P	ri-tri	ri-tct		b	P	ri-tri	ri-tct	Comportamiento evaluado
33	1,81	25~	23~	36		1,34	29~	34~	45	IMD.3: otras operaciones: quebrados
26	2,02	34~	16~	33		1,51	37~	24~	48	IMD.6: cálculo mental
30	2,33	18~	13~	27		1,8	20~	23~	35	IMD.7: otras: %, probabilidades
32	2,65	45~	7~	23		3	43~	0~	15	IMD.7: otras: %, probabilidades

Proceso R: capacidad de razonar

Muestra UASD (N=4028) Muestra total (N=6190)

Item	b	P	ri-tri	ri-tct		b	P	ri-tri	ri-tct	Comportamiento evaluado
28	1,61	42~	20~	34		1,28	43~	28~	39	IMR.1: hacer comparaciones
25	0,23	59~	35~	44		0,26	60~	40~	48	IMR.3: buscar anal--semej.

Proceso F: flexibilidad mental (no hay ítems que miden este proceso en el POMA.3)
Proceso P: capacidad de solucionar problemas de de carácter práctico

Muestra UASD (N=4028) Muestra total (N=6190)

Item	b	P	ri-tri	ri-tct		b	P	ri-tri	ri-tct	Comportamiento evaluado
23	-1,06	77~	37~	43		-0,92	78~	40~	43	IMP.1: resol.problemas nivel 1- oper. directas
24	-1	73~	29~	36		-0,91	74~	32~	37	IMP.2: resol. roblemas nivel 2- oper. derivadas
34	3	22~	1~	21		3	22~	-1~	17	IMP.2: resol. roblemas nivel 2- oper. derivadas
35	3	21~	6~	24		2,59	23~	13~	28	IMP.2: resol. roblemas nivel 2- oper. derivadas

Si se considera como *carencias* aquellos ítems que presentan valores en el parámetro **b**, que sean igual o mayores que +0.50, se pueden establecer tres categorías:

- los que presentan una *carencia considerable*, cuando el valor de **b** esta entre **+0.50** y **+0,99**
- los que presentan *carencia muy importante*, cuando el valor de **b** esta entre **+1.00** y **+ 2.99**
- los que presentan *dificultades en la redacción o carencia absoluta del contenido de los items*, cuando el valor de **b** es igual a **+3.00**

De acuerdo este criterio se puede afirmar que: estas *carencias* se hallan, viendo los resultados del análisis de los ítems por procesos mentales de este modo en el:

Proceso A: *(Asimilación de conocimientos básicos e instrumentales en matemáticas)*
De los seis ítems que hay en el POMA.3 presentan carencia tres ítems (27, 29 y 31) que hacen referencia a la evaluación del comportamiento IMA.3. Algebra

Proceso D: *(dominio de destrezas en matemáticas)*
De los cuatro ítems que hay en el POMA.3 presentan carencia los cuatro (33, 36, 30 y 32 que hacen referencia a la evaluacióne de los siguientes comportamientos: operaciones con quebrados (33), cálculo mental (36) y estimación de probabilidades (30 y 32).

Proceso R: *(capacidad de razonar con material matemático)*
De los dos ítems que hay en el POMA.3 referentes a este proceso presenta carencia uno el ítem (28) que hacen referencia a la evaluación del comportamiento: hacer comparaciones entre conceptos elementos matemáticos

Proceso P: *(capacidad para solucionar problemas de carácter practico)*
De los cuatro ítems que hay en el POMA.3 referentes a este proceso presentan carencia dos ítem (34 y 35) que hacen referencia a la resolución del problemas de nivel 2, que implica hacer las cálculos para resolverlos, después de hacer unas operaciones previas a los datos ofrecidos en el problema, casos en los carencia es absoluta-

5º Plan de acción o procedimiento general en la solución de problemas matemáticos:

Es importante que a los estudiantes que se les ofrezca el ***plan de acción*** para la solución de problemas, el cual deben:

- *conocerlo primero de acuerdo* a la sistematización de los procesos mentales presentada en el apartado Mat.3,
- *aplicarlo a diversas clases de problemas* matemáticos,
- *repetir su aplicación varias veces*, ha que los alumno lo asimilen de modo que lo conviertan en automatismo
- y *poder generalizarlo* a diversas situaciones vitales

Para una mejor comprensión de los propositos de este manual se aplica el anterior plan de accion a un ejemplo, tomado del Poyecto PISA, 2006 del área de matemáticas:

Ejemplo 1º: Las exportaciones en Zedlandia

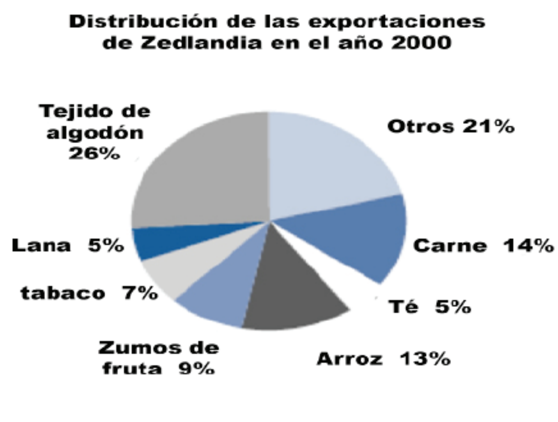
Se presenta al estudiante o un grupo pequeño de los mismos (4-8) la *tarea inicial* :dos gráficos referentes a las exportaciones de una pais virtual Zedlandia, una tabla, o una expresión matemática), en la que indica claramente la respuesta que se espera que den los alumnos.

Esta respuesta suele ser pedida a través de una pregunta o más preguntas, como puede verse a continuación.

Estos gráficos contienen información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya unidad monetaria es el zed.

Gráfica 1

Gráfica 2



Preguntas
¿Cuál es el valor aproximado de exportaciones de zumos de fruta de Zedlandia en 2000?

A. 1,8 millones de zeds. B. 2,3 millones de zeds. C. 2,4 millones de zeds.
D. 3,4 millones de zeds. E. 3,8 millones de zeds.

Paso 1º Plan de acción

Ante la pregunta: ¿Cuál fué el valor de las exportaciones de zumos de fruta de Zedlandia en el año 2000?

Se propone el siguiente plan de acción:

1º ***buscar información,*** *pero, dado el caso que este es un ejemplo virtual, esta debe ser buscada en los graficas dada,*

2º ***por lo que hay que acudir a la primera grafica,*** *y concretizar el valor de las exportaciones en el 2000: 42.6 millones de zeds.*

3º ***en la grafica 2,*** *se ve que en ese año (2000) el porcentaje de la exportación de zumos, equivale al 9% del total que es el 42.6 millones de zeds*

4º ***si quiere conocer el total de millones de zed que se exportan,*** *se debe traducir el problema a términos matemáticos, que sería estimar proporciones entre los dato de las dos graficas.*

42.6 es 100%

x 9%

5º ***resolverlo matemáticamente,*** *de acuerdo al modelo matemático propuesto, de este modo:*

*x= (42.6 *9)/100=3,834*

6º ***y dado que la pregunta se presenta en formato de pregunta de selección múltiple,*** *se termina la señalando la opción D, que es tiene el valor mas cercano a 3,8*

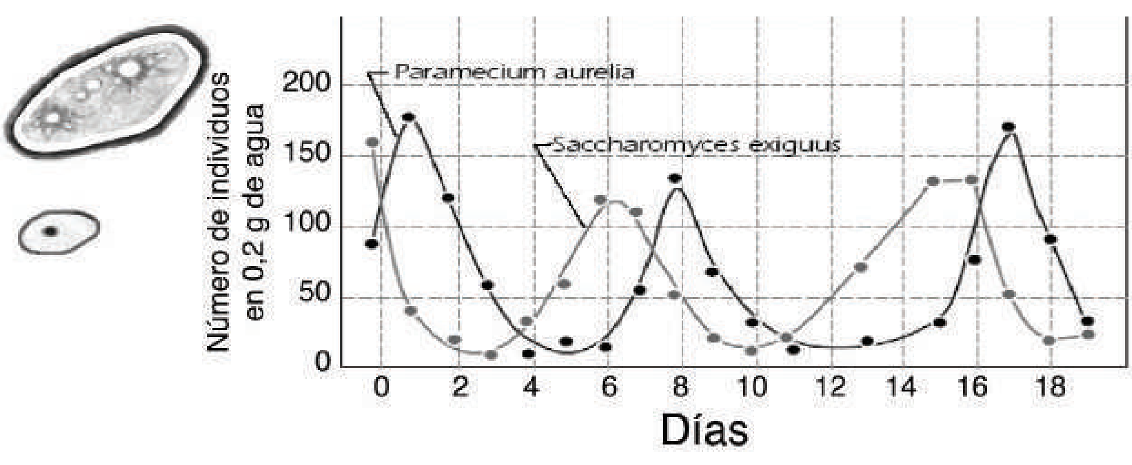
PASO 2º: Reflexión individual o colectiva *sobre lo hecho y los errores que se han cometido, así como las facetas que han podido influir en su ejecución*

PASO 3º: Se pide los estudiantes que expliquen *las estrategias utilizadas por algunos alumno o grupos y comparar las mismas, buscando: semejanzas, relaciones. entre ellas..*

PASO 4º: Finalmente se procede a la generalización este proceso, invitando a los estudiantes a *aplicar estos aprendizajes* a otros casos…

Ejemplo 2: Presa y Depredador

Se presenta al estudiante o un grupo pequeño de los mismos (4-8) la *tarea inicial* :consitente en una grafica y las dos preguntas, como verse a continuación:



Este problema presenta dos preguntas;

Pregunta 1ª: *Analizando el gráfico podría indicar ¿quien es la presa y quien el depredado'*
Pregunta 2ª:*¿Es aplicable a este caso, la tasa de crecimiento de los depredadores?*

Este problema presenta dos preguntas, por lo que el **plan de acción** debe ser dividido en dos secciones:

1º Plan de acción para la primera pregunta:

En el grafico ¿Quién es la presa y quién el depredado?

La ejecución del plan acción a esta pregunta requiere realizar las siguientes actuaciones:

1. ***buscar la información****, que permita aclara los conceptos de presa y depredador: la presa es la bacteria que sirve de alimento al depredador,*
2. ***señalar la relación que existe entre ambas bacterias en el gráfico:*** *un crecimiento inverso entre ambas.*
3. ***relación que implica:*** *que el crecimiento de la presa debe ser anterior al del depredador,*
4. ***observar que en la grafica hay dos trazados sinoidales*** *muy similares pero en tiempos distintos.*
5. ***0bservacion que permite inferir*** *que la presa es el Paramecium y el depredador el Saccharomyces.*

2º Plan de acción para la segunda pregunta.

¿Es aplicable a este caso la tasa de crecimiento de los depredadores?

La ejecución del plan acción a esta pregunta requiere realizar las siguientes actuaciones:

Paso 1. Sistematización de las actuaciones

1. ***buscar la información*** en el diccionario o en el servidor de google de internet que es tasa de crecimiento..
2. ***revisar en la gráfica la separación*** *que hay entre ambas curvas sinoidales, se ve que esta es constante.*
3. ***comparar los puntos*** *mas altos y los mas bajos de dichas curvas. Se observa que estos son muy similares con pequeño retraso temporal, lo que indica que el depredador crece comiéndosse a la presa, que alcanza niveles ligeramente mas altos debido a que en el punto de partida 0, este tiene ya un ciento valor, este tiene ya un cierto valor, que es reforzado con la alimentación de la presa.*
4. ***de lo que se puede inferir*** *que la tasa de crecimiento se cumple casi a la perfección en este caso.*

5. ***Explicarla.***

PASO 2º: Reflexión individual o colectiva sobre lo hecho y los errores que se han cometido, así como las facetas que han podido influir en su ejecución

PASO 3º: Se pide los estudiantes que expliquen las estrategias utilizada para realizarla (en forma individual o por grupo) y comparar las mismas, buscando: semejanzas, relaciones...

PASO 4º: Finalmente se precede a la generalización este proceso, invitando a los estudiantes a aplicar estos aprendizajes a otros casos…

UNIDAD I

TEORÍA DE LOS CONJUNTOS

Introducción.

Se ha dicho en el marco teórico, que los objetivos generales de los cursos universitarios de nivelación son ***apoyar el desarrollo de: conocimientos, habilidades y actitudes en torno a la matemática.***

Para alcanzar estos objetivos se propone un método de trabajo aplicado a la matemática y un conjunto de ejercicios que permiten al estudiante poner en práctica algunos procesos mentales en cada una de las unidades en que se ha dividido este curso de nivelación.

Referente a conocimientos:

Objetivos específicos:

a. Estimular el desarrollo de las capacidades para:
   analizar los conceptos básicos sobre la teoría de conjuntos,
   expresar los mismos bajo diversas formas,
   aprender a expresarlos, con precisión y eficacia, mediante expresiones matemáticas,
   lo que equivale a:
   plantearlos con claridad,
   formularlos adecuadamente,
   resolver los problemas matemáticamente
   e interpretar las soluciones encontradas…
b. facilitar la representación mental de los números,
c. y buscar las posibles relaciones existentes entre ellos.

Sistematización o pasos a dar para realizar ejercicios:

I.1: Después de haber trabajado el profesor y los alumnos con el texto y ejercicios de la Unidad I, se procederá a realizar algunos ejercicios diseñados para cumplir los objetivos antes señalados.

I.2 Actividades a realizar:

Ejercicios referentes a los conocimientos:

Los ejercicios que se presentan a continuación, van dirigidos al fortalecimiento de los conocimientos propios de la unidad I:

Estos ejercicios pueden realizarse, bien individualmente, bien en pequeños grupos de 6-8 alumnos.

El objetivo concreto de estos ejercicios es:

> "*Apoyar el desarrollo* de la capacidad de buscar las relaciones existentes entre conceptos propios de la teoría de conjuntos, expresados bajo tres formas: el nombre que evoca el concepto, una descripción verbal del mismo y una expresión matemática del mismo.

Sistematización de los pasos a desarrollar

Paso 1º:

Los ejercicios consisten en presentar las tablas a los alumnos individualmente y/o en pequeños grupos, con el objeto de que traten de:

1º *Relacionar los conceptos* indicados en la 1ª columna con una de las descripciones de la segunda columna, colocando el número de la primera enfrente de la segunda columna.

2º *Completar la tarea* colocando, también, el número del concepto de la 1º columna en cada expresión matemática de la columna 3ª que le corresponda.

Paso 2º:

Acabado esta actividad, los alumnos presentarán sus repuestas al grupo y argumentarán de la mejor forma posible sus respuestas. En el caso de trabajar en pequeños grupos, estos deben ponerse de acuerdo, primero, sobre la adecuación de las respuestas. Finalmente harán una reflexión individual o colectiva *sobre lo hecho y los errores que se hayan cometido, así cómo las facetas o contingencias que han podido influir en su ejecución. Se terminará dándole un nombre global que abarque estas circunstancias*.

Paso 3º:

Terminado el paso anterior, se pide a los estudiantes que expliquen las estrategias utilizadas para realizar el ejercicio., luego procederán a identificar, aislar y describir los procesos mentales que han utilizado (en forma individual o en grupo) y comparar los mismos, para pasar luego a buscar: las semejanzas y posible relación entre ellos. Por último, si está a su alcance, deben establecer la secuenciación de estos procesos.

Paso 4º:

Finalmente se precede a la generalización de estos procesos mentales, invitando a los estudiantes a aplicar estos aprendizajes a otros casos de la vida práctica.

Terminada la actividad anterior podrán pasar, si el profesor mediador lo cree oportuno, a trabajar del mismo modo en este otro cuadro, identificando los cuatro modos de expresar los conceptos: nombre, descripción verbal, expresión matemática y un diagrama.

Paso 5º:

El ejercicio consiste en presentar la tabla II a los alumnos individualmente y/o en pequeños grupos, con el objeto de que traten de:

1º *relacionar los conceptos* indicados en la 1ª columna con una de las descripciones de la segunda columna, colocando el número de la primera enfrente de la segunda columna.

2º *completar la tarea* colocando, también, el número del concepto de la 1º columna en cada expresión matemática de la columna 3ª que le corresponda.

3º finalmente, ver los diagramas presentados, identificarlos y asociarlos al concepto adecuado y colocar debajo la expresión o expresiones matemáticas que los identifican.

Paso 6º:

Acabada esta actividad, los alumnos presentarán sus repuestas al grupo y argumentarán de la mejor forma posible sus respuestas. En el caso de trabajar en pequeños grupos, éstos deben ponerse de acuerdo, primero, sobre la adecuación de las respuestas. Finalmente harán una reflexión individual o colectiva *sobre lo hecho y los errores que se hayan cometido, así como las facetas o contingencias que han podido influir en su ejecución. Se finalizará la actividad dándole un nombre global que abarque estas circunstancias*.

Paso 7º

Terminado el paso anterior, *se pide a los estudiantes que expliquen* las estrategias utilizadas para realizar el ejercicio; luego procederán a identificar, aislar y describir los procesos mentales que han utilizado (en forma individual o en grupo) y comparar las mismas, para pasar luego a buscar: las semejanzas y posible relación entre ellos. Por último, si está a su alcance, deben establecer la secuenciación de estos procesos.

NOTAS HISTÓRICAS:

Georg Cantor

Famoso matemático judío-ruso, nacido en San Petersburgo, Rusia, el 3 de marzo de 1845.

Se especializó en Matemáticas, Filosofía y Ciencias Físicas. Cantor hizo un profundo estudio sobre las *"Disquisiciones Aritméticas de Gauss"*, y en 1867, con el propósito de obtener el título de Doctor, escribió su *"Disertación"*. Antes de cumplir los 30 años, Cantor publicó su primer trabajo revolucionario sobre la famosa *"Teoría de Conjuntos"*. El inesperado y paradógico resultado, referente al conjunto de todos los números algebraicos y la completa novedad de los métodos empleados, señalaron inmediatamente al joven autor como matemático creador, de originalidad extraordinaria. Los razonamientos de Cantor en su *"Teoría de las Clases Infinitas"* fueron considerados por Kronocker, antiguo profesor suyo, como una forma peligrosa de locura matemática. Kronocker atacó afanosamente y con todas las armas que encontró a su alcance, la *"Teoría positiva del Infinito"*, lo mismo que a su hipersensible autor, George Cantor, quien, a consecuencia de los injustos ataques, trágicamente se convirtió en paciente de un manicomio. El creador de la *"Teoría de Conjuntos"* murió en Halle, el 6 de enero de 1918, a los 73 años de edad, en un hospital para enfermos mentales. Ya para antes de su muerte le habían sido concedidos numerosos honores y su obra había logrado ser aceptada y reconocida.

I.1 Conjunto. Notación. Relación de Pertenencia.

¿Qué es una colección de flores?

¿Puedes dar un ejemplo de una colección?

¿Qué idea tienes de : equipo, tropa, colmena, mitin, movilizaciones, asamblea ?

Conjunto de Flores

Biblioteca

Conjunto de libros.

Una ***idea*** fundamental en todas las ramas de la matemática es la de conjunto. El concepto de conjunto es uno de los llamados ***primitivo***, puesto que no se da una definición de él, pero intuitivamente lo entendemos como una colección o grupos de objetos. Estos objetos que forman el conjunto lo llamamos ***elementos*** del conjunto.

Existe una gran variedad de objetos que podemos llamar conjuntos, por ejemplo:

1. Los equipos de béisbol invernal de la República Dominicana.

2. Los países que forman las Antillas Mayores.

3. Su equipo favorito de baloncesto de la NBA.

4. Los números naturales pares 2, 4, 6…

5. Los números enteros entre 0 y 1.

Para expresar un conjunto usamos diferentes maneras; las más usadas son por ***comprensión*** y por ***extensión***, además se pueden utilizar letras mayúsculas para nombrar un conjunto.

Por comprensión: cuando se da una regla o condición que nos permita decidir si un elemento está o no está en el conjunto. Así, para especificar que es un conjunto usamos el símbolos { } y una letra minúscula para representar un elemento cualquiera y así escribimos el ejemplo 1 como:

A= {x/x es un equipo de béisbol invernal de la República Dominicana}

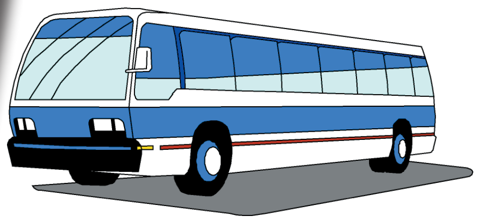
Los Leones del Escogido es un elemento del conjunto A, para mostrar lo anterior usamos el símbolo $\in$, que significa es un elemento de, así escribimos: Leones del Escogido $\in$ A

Los Cardenales de San Luis no es un elemento de A, entonces usamos el símbolo $\notin$ para escribir: Los Cardenales $\notin$ A.

Por extensión: cuando se nombran todos los elementos del conjunto encerrándolos entre llaves y separándolos por comas, entonces el conjunto de las Antillas Mayores del ejemplo 2 lo escribiríamos como: B= {Cuba, Rep. Dom. Haití, Jamaica, Puerto Rico}

¿Qué te indican estos enunciados?

1. Los autobuses del transporte.
2. Los huesos de tu cuerpo.
3. La producción turística del 2008.
4. Los estudiantes dominicanos.
5. Los glóbulos rojos de tu cuerpo.
6. Las leyes dominicanas.
7. Los plátanos barahoneros.
8. Los latidos de tu corazón.
9. Las provincias dominicanas.
10. Los meses del año de 30 días.



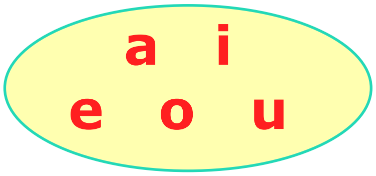
Todos estos enunciados representan conjuntos, ya que expresan colecciones de elementos bien definidos.

¿Qué es un conjunto musical?

Menciona algunos.

¿Existen conjuntos deportivos? ¿Cuáles?

¿Cuál es el conjunto de las vocales?



Las vocales son ***a, e, i, o, u*** pero para expresarlas como un conjunto tienes que encerrarlas entre dos llaves y separarlas por coma, esta es la forma por ***extensión***, así ***{a, e, i, o, u}***

También puedes indicar una generalidad del conjunto y llamarla por una variable, así:
V = {x/x es una vocal}

que se lee: *«V es igual al conjunto de las equis tal que equi, es una vocal».*

Esta es la forma por ***comprensión o abstracción***, donde, con una variable y una frase indica la propiedad o cualidad común de sus elementos.

Expresa por extensión el conjunto formado por tus familiares y por comprensión todas las personas que tienen tu Apellido.

F = {
A = {*x/x es*

¿Qué utilidad tiene expresar un conjunto por ***Extensión*** o por ***Comprensión***?

Expresar un conjunto por extensión tiene sus ventajas y desventajas. Si quieres ver todos los elementos nombrados uno a uno, es más conveniente expresar el conjunto por ***extensión***; pero existen conjuntos que son muy extensos y es preferible que busques la *cualidad o propiedad* común de sus elementos y la designas por una variable, con esto generalizas el conjunto y lo expresas por ***comprensión*** y así tienes todos sus elementos entre las dos llaves.

¿Puedes formar un conjunto con los elementos que te rodean en tu entorno?

¿Cómo te conviene formar ese conjunto, por extensión o por comprensión ?

El conjunto de los alumnos sobresalientes de tu escuela, ¿Cómo te conviene expresarlo, por extensión o por comprensión?
En el equipo de voleibol de tu barrio participan varios conocidos tuyos, entre ellos: Héctor, Ariel, Miguelina, Joaly, Junior y Cirilo; aunque Manuel, Nelson, Grisel y Guillermo forman parte del equipo de baloncesto.

¿A qué equipo pertenece Ariel?

¿Pertenece Grisel al equipo de baloncesto?

Puedes decir que: *"Manuel pertenece al equipo de baloncesto"* y lo simbolizas así :
Manuel $\in$ baloncesto

"Grisel no pertenece al equipo de volibol", lo expresas así: Grisel $\notin$ Voleibol

Joaly $\in$ Voleibol, Miguelina $\notin$ baloncesto, Manuel $\notin$ Voleibol, Guillermo $\in$ Baloncesto.

Si V = $\{a, e, i, o, u\}$ puedes decir que *a* es un elemento del conjunto V, y lo expresas así: $a \in V$, significa "*a* pertenece al conjunto V" o "*a es elemento del conjunto V*", pero *m* no pertenece al conjunto V, entonces lo expresas así : $m \notin V = \sim(m \in V)$, que significa: «*m no pertenece al conjunto V*».

Dos conjuntos son ***iguales***, si y solo si tienen los mismos elementos, por ejemplo {a, b, c} y {c, b, a} son iguales y escribimos {a, b, c} = {c, b, a}.

Un conjunto que no contiene elementos, como el del ejemplo ***Los números enteros entre 0*** y ***1***, se llama ***conjunto vacío*** y se denota por $\varnothing$ o por { }, asi $\phi \neq 0 \neq \{0\} \neq \phi$

*** Los mares que rodean la ciudad de Santiago de los Caballeros.

*** Batallas ganadas por Pedro Santana en Francia

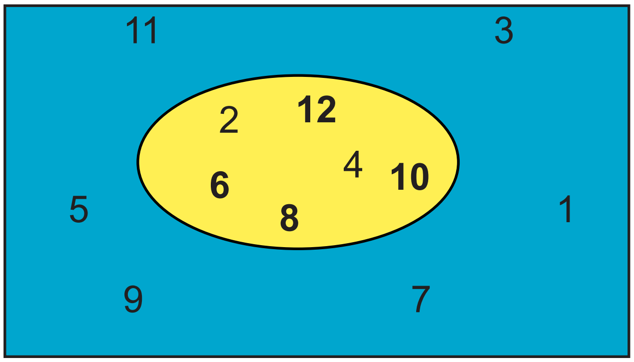
El número de elementos de un conjunto de llama ***número cardinal del conjunto***. Se denota por card (A) y se lee como número cardinal del conjunto A. Así, el número cardinal del ejemplo: ***Los equipos de béisbol invernal de la República Dominicana son 6.***

Si el proceso de contar todos los elementos de un conjunto tiene fin, decimos que el conjunto es ***finito***. Por ejemplo: *Los glóbulos rojos de la sangre y Los libros de una biblioteca, forman conjuntos finitos*. Cuando el proceso de contar los elementos de un conjunto continúa sin tener fin, diremos que el conjunto es ***infinito***. Así el ejemplo ***Los números naturales pares 2, 4, 6………..*** es *un conjunto infinito al igual que el conjunto de los números enteros y los puntos de una recta.*

Cuando cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, diremos que A es un ***subconjunto*** de B y lo escribimos como $A \subset B$. por ejemplo; {x/x es una vocal} ⊂ {x/x es una letra del alfabeto} y {Números pares} ⊂ {Números naturales}

I.2 Gráfica de los conjuntos. Diagramas.

Para ilustrar el último ejemplo usamos diversos tipos de dibujos o diagramas. El más usado es el ***Diagrama de Venn***; en este caso el conjunto de los números naturales es un rectángulo y el conjunto de los números pares es un círculo; como se muestra en la figura, el círculo está dentro del rectángulo.



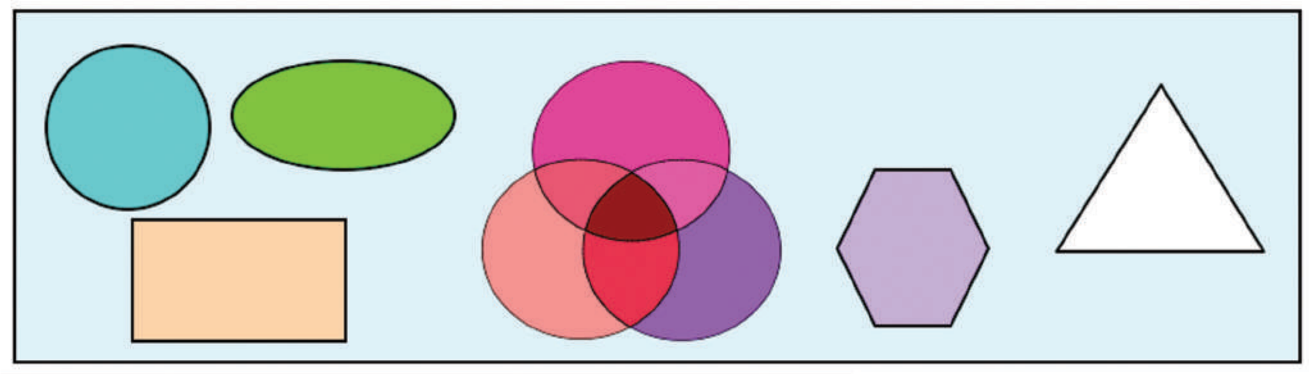
NOTA HISTÓRICA

Leonardo Euler

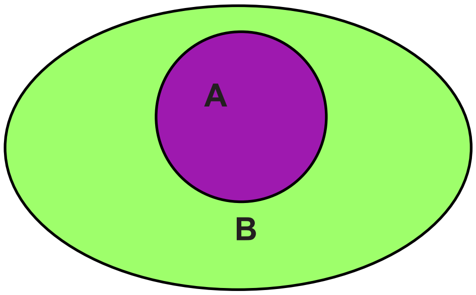
Iluste matemático suizo nacido en 1707, hijo de un clérigo, que vivía en los alrededores de Basilea. Se graduó de Doctor a los 17 años en la Universidad de Basilea y su discurso de grado versó sobre: "Comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano". A los 19 años envió dos disertaciones a la Academia de París: "La arboladura de barcos" y "La filosofía del Sonido". Este ilustre matemático vivió en Rusia y Alemania en su época brillante. Es el autor de las curvas como representación gráfica y lo hace notar en una misiva dirigida a una princesa alemana con la nota: "porque todo sale a la vista". Nos legó el principio: "Todo número entero positivo es la suma de, a lo sumo, cuatro cuadrados"

John Venn, *matemático inglés, le da seguimiento a las curvas de Euler, y en1881, en su obra "Lógica Simbólica", utiliza los diagramas como representación de unidades de razonamiento.*

¿Cómo puedes graficar un conjunto?



Se observa que cada conjunto es subconjunto de sí mismo, a este subconjunto de sí mismo se le llama ***subconjunto impropio***. A cualquier otro subconjunto le llamaremos ***subconjunto propio*** del conjunto. Además, se acepta que $\varnothing$ es un subconjunto propio de todo conjunto excepto de sí mismo.



¿Qué indica el diagrama?
Que todos los elementos del conjunto A están contenidos en el conjunto B, es decir, que A es parte de B, o que A es sub-conjunto de B, y lo puedes expresar $A \subset B$ o que B incluye a A y lo expresas: $B \supset A$.

$A \subset B \leftrightarrow \forall x/[x \in A \rightarrow x \in B]$

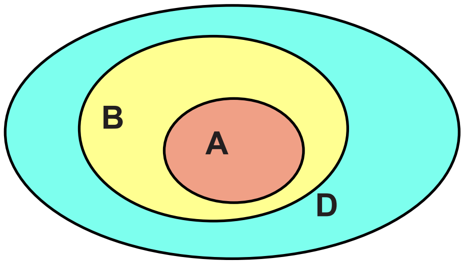
Observa estas propiedades del subconjunto.

1. Reflexiva. Todo conjunto es sub-conjunto de sí mismo: $A \subset A$

2. Transitiva. Si $A \subset B \wedge B \subset D$ entonces $A \subset D$

3. Antisimétrica Si $A \subset B \wedge B \subset A$ entonces $A = B$

4. El conjunto vacío es sub-conjunto de todos los conjuntos.



¿Cuáles elementos comunes tienen el conjunto L = *{x/x es una lata de pintura}*, y el conjunto J= *{x/x es una lata de jugo}?*

El conjunto de las latas de pintura no tiene nada en común con el conjunto de las latas de jugo, y si tuvieras que mezclar el contenido de un elemento de cada conjunto tampoco tendría nada en común. Por tanto, el conjunto L es disjunto del conjunto J, ya que no tienen elementos comunes.

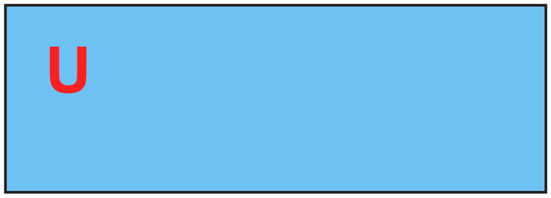
Los conjuntos que no tienen elementos comunes son los conjuntos ***disconectos*** o ***disjuntos***.

¿Qué parte común tiene en el mapa la ciudad de Barahona con la ciudad de Higüey?
¿Dónde se intersecan el río Ozama con el río Artibonito?

I.3 Tipo de Conjuntos.

¿Qué es un Universo?

Si quieres estudiar las condiciones sociales de tu sector, tienes que crear un conjunto cuyos elementos sean todas las situaciones que se presentan en ese sector, entonces debes construir su ***Universo***.



El conjunto Universal se representa por: U e indica algo que contiene la totalidad de condiciones para realizar un estudio.

Cualquier conjunto, distinto de $\varnothing$, tiene dos subconjuntos a lo menos, $\varnothing$ y el mismo.
Si los elementos de un conjunto, también son conjuntos, se llaman ***familia de conjunto***. Así {{1, 2}, {2}, {2,3}} es una familia de conjunto, pero {{1,2},2,{2,3}} no lo es, porque 2 no es un conjunto, es un elemento.

El conjunto de 25 países que forman la Unión Europea forma familia de Conjuntos.

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto A se llama conjunto potencia de A y se designa por P (A) o 2^A.

Ejemplo: Si A, finito, tiene *n* elementos entonces el conjunto potencia de A tendrá 2^n elementos. Se observa que B = {x, q, z} tiene tres elementos por la que su conjunto potencia tiene 2^3 o sea 8 elementos, ***encuéntralos.***

Es el momento de repasar lo aprendido

1. Expresa por extensión los siguientes conjuntos.

1. Los deportistas más sobresalientes del año ____________________
2. Tus mejores amigos.____________________
3. Los puertos dominicanos.____________________
4. Los Héroes de la Gesta Restauradora.____________________
5. Las cinco provincias dominicanas más grandes.____________________
6. Tus profesores. ____________________
7. Las carreras que te gustaría estudiar.____________________
8. Los miembros de tu familia.____________________
9. Las materias que recibes ____________________
10. Medios de transporte del país ____________________

2. Expresa por comprensión los siguientes conjuntos:

1. Los granitos de arena del mar. ____________________
2. Los árboles dominicanos.____________________
3. Las mujeres dominicanas.____________________
4. Los números negativos. ____________________
5. Los periódicos dominicanos.____________________
6. Los puntos de una recta.____________________
7. Las calles de Santo Domingo.____________________
8. Las moléculas que componen la atmósfera.____________________
9. Las células de tu cuerpo.____________________
10. Los ríos dominicanos. ____________________

3. Forma un conjunto donde los elementos son:

1. Animales ______
2. Árboles frutales ______
3. Familiares ______
4. Ríos dominicanos ______
5. Partidos políticos dominicanos ______
6. Deportistas dominicanos ______
7. Músicos dominicanos ______
8. Cantantes dominicanos ______
9. Presidentes dominicanos ______
10. Deportes ______

4. Si M = {x/x es un mes del año} y E = {x/x es una estación del año}, entonces escribe una V a la proposición verdadera y una F a la falsa.

1. [ ]	Enero $\in$ E	6. [ ]	Primavera $\notin$ E	11. [ ]	27 de febrero $\in$ M
2. [ ]	Abril $\in$ M	7. [ ]	Diciembre 25 $\in$ M	12. [ ]	Verano $\in$ E
3. [ ]	Julio 7 $\notin$ M	8. [ ]	Marzo $\notin$ E	13. [ ]	Mayo 30 $\notin$ M
4. [ ]	Otoño $\in$ E	9. [ ]	Abril 18 $\in$ M	14. [ ]	Agosto $\in$ E
5. [ ]	Agosto 4 $\notin$ E	10. [ ]	Invierno $\in$ M	15. [ ]	Octubre $\notin$ M

5. Pon una F si es falso y una V si es verdadero.

Sea: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} B = {a, b, c, d, e} C = {3, 5, 7, 9}

1. $a \in A$	[ ]	6. $7 \in B$	[ ]	11. $\sim(e \in C) \wedge (6 \notin B)$	[ ]
2. $3 \notin A$	[ ]	7. $8 \notin C$	[ ]	12. $[2 \notin A] \leftrightarrow [a \in B]$	[ ]
3. $b \in B$	[ ]	8. $\sim(c \in A)$	[ ]	13. $(5 \in C) \vee (4 \notin A)$	[ ]
4. $9 \notin C$	[ ]	9. $4 \notin B$	[ ]	14. $\sim(a \notin B) \rightarrow (5 \in A)$	[ ]
5. $d \notin A$	[ ]	10. $\sim(1 \in C)$	[ ]	15. $(7 \in A) \wedge (a \notin C)$	[ ]

6. Escribe una V en los conjuntos vacíos, una U en los conjuntos unitarios, una F en los conjuntos finitos y una I en los conjuntos infinitos:

1. _____ Los hombres de la tierra.
2. _____ Los hombres que habitan en Marte.
3. _____ Las calles de la Ciudad de Sto Dgo.

11. _____ Los árboles del mundo.
12. _____ Granitos de arenas del Sahara.
13. _____ Los puntos del segmento AB

4. _____ Conjunto de abogados de 12 años de edad.
5. _____ Conjunto de los números fraccionarios.
6. _____ Gallinas vivas de 4 patas.
7. _____ Palabras que terminan en S.
8. _____ Los niños que viven, nacidos en 1600.
9. _____ Maestros de 178 años en servicio
10 . _____ Los vehículos que navegan.
14. ____ Colores del Arcoiris
15. ____ Los habitantes de la Luna
16. ____ Los puntos del círculo
17. ____ Segundos que hay en 60 años
18. ____ Los múltiplos de 4
19. ____ Letras que tiene la Biblia
20. ____ Puntos del Plano.

6. Completar el cuadro con ejemplos de cada tipo de conjuntos:

Conjuntos vacíos	Conjuntos unitarios	Conjuntos finitos	Conjuntos infinitos

7. Usando el método de extensión, especifica cada uno de los siguientes conjuntos. En cada caso, di si el conjunto es finito o infinito.

1. {Los números pares entre 11 y 19}
2. {Los enteros mayores que 5 y menores o iguales que 15}
3. {Los días de la semana cuyos nombres empiezan con la letra M}
4. {Los meses cuyos nombres empiezan con la letra L}
5. {x/x es un número natural mayor que 3}
6. {Los múltiplos de 5 entre 25 y 50, ambos inclusive}
7. {Los países que tienen frontera con Estados Unidos}
8. {Los dígitos de 1998}
9. {Los cuadrados de los números naturales}
10. {Los presidentes de República Dominicana después de Trujillo}

8. Usando el método por comprensión, especifica cada uno de los siguientes conjuntos.

1. {1,3,5,7}
2. {10,12,14,16}
3. {Junio, Julio}
4. {Rojo, Blanco, Azul}
5. {3, 6, 9, 12,….}

6. {Barack Obama}
7. {do, re, mi fa sol, la si}
8. {martes, miércoles}
9. {30,33,36….69}
10. {2,4,8,….256}

10. Di si cada proposición es verdadera o falsa, da las razones de cada respuesta.

1. $10 \in \{9 + 12, 13 - 3, 7 + 5\}$
2. $4 \notin \{(1)^2, (2)^2, (3)^2,……\}$
3. $\{1 ,5\} \subset$ {Los números impares}
4. {Los números pares} $\subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$
5. $\varnothing = \{ \varnothing\}$
6. $\{1, 2, 3\} = \{ 5-4, \frac{5 \times 4}{10}, \frac{27}{9} \}$
7. $\{3, 6\} \notin$ { Los múltiplos de 3}
8. $12 \in \{1, 2, 3\}$
9. $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$
10. $1 \subset \{1, 2, 3\}$

11. Encuentra el Card (A) para cada conjunto.

1. A= {0, 1, 2, 3, 4, 5}
2. A= {2, 4, 6, 8, ….100}
3. A= {a, b, c,….z}
4. A= {x/x es un punto cardinal}
5. A= {x/x es un senador de la República Dominicana}
6. A= {x/x es un entero impar mayor 100,000}

12. Dibuja un diagrama de Venn para indicar las relaciones entre los conjuntos que se dan.

1. A= {Los números naturales}
   B= {Los números impares}
2. A= {Todos los caballeros}
   B= {Todos los animales}
   C= {Todos los potros}
3. A= {Los enteros positivos}
   B= {Los naturales menores que 6}
   C= {Los naturales mayores que 15}
4. A= {Todos los hombres}
   B= {Todos los hombres que son profesores de matemáticas}
   C= {Todos los hombres que miden 1.80 metros de estatura}

5. A= {Todos los países de América}
B= {Todos los países de America del Sur}
C= {Todos los países de América que hablan español}

13. Encuentra el conjunto potencia de cada conjunto.

1. A= {1,2}
2. B= {a, b, c}
3. C= {1, 5, 10, 25}
4. D= {x/x es un mes del año}

14. Responde:

1. Supón que tienes los siguientes billetes: $100, $50, $200 y $500. ¿Cuántas Cantidades diferentes de dinero podrías formar?
2. Si reemplazamos los billetes por (modelo) monedas de $ 1, $5, $10 y $25. Repite el ejercicio anterior.
3. De un grupo de 5 personas requieres formar una comisión de 3 o de 2 miembros. Haz una lista de todas las formas posibles en que esto se pueda hacer.

Es el momento de repasar lo aprendido:

1. Forma dos familias de conjuntos que representen instituciones del país.

2. Construye dos conjuntos universales de necesidades que hay que estudiar para buscarles soluciones.

3. Forma dos conjuntos disjuntos, cuyos elementos sean situaciones de tu escuela.

4. Escribe dos conjuntos disconectos, que tengan como elementos situaciones de tu casa.

5. Escribe dos conjuntos disjuntos, que sus elementos sean situaciones políticas.

I.4 Formas Proposicionales y Conjuntos.

Si formas un conjunto universal U = *{x/x es una letra del alfabeto castellano}* y formas el enunciado *«x es una vocal»*, puedes decir que este enunciado puede convertirse en proposición si se sustituye x por un elemento del conjunto U, si $x = b$ se convierte en una proposición falsa, pero si $x = a$, entonces la proposición es verdadera :»*x es una vocal»* es una ***forma proposicional,*** ya que puede convertirse en proposición al sustituir *x* por un elemento del conjunto de referencia U.

Como V = *{x/x es una vocal}* es un sub-conjunto de U, cuya forma proposicional es: *Vx: x es una vocal*, que se lee: *"V de x tal que x es una vocal*, entonces dices que V es el conjunto de validez de la forma proposicional Vx.

Las ***formas proposicionales*** siempre deben tomar un conjunto como referencia y se designan por el conjunto acompañado de la variable, así: A*x*, B*x*, D*x*, etc.

En la asamblea todos aprobaron el pago en dólares, este enunciado te revela que había una asamblea y que la totalidad aprobó el pago en dólares.

Lo mismo sucede al referirte a conjuntos.

$\forall$

Si el conjunto referencial de la forma proposicional *Vx : x es una vocal* es $V = \{x/x \text{ es una vocal}\}$, entonces el conjunto de validez de V*x* es V, ya que todos los elementos de V son vocales, o lo que es lo mismo: *«para todo elemento* $x \in V$*, Vx es verdadera»*, y lo expresas así: $\forall x \in V : Vx$.

La expresión ***«para todo»*** se simboliza por $\forall$ ***[que significa totalidad]***, y es el símbolo que representa el ***Cuantificador Universal***, y expresa que lo que se coloca a su derecha es válido para la totalidad de los elementos del conjunto referencial.

Si el conjunto de referencia de Vx es U = {x/x es una letra del alfabeto castellano}, entonces la forma proposicional Vx: x es una vocal, no es verdadera para todos los elementos de U, pero si «existen» algunos elementos de U que hacen a V*x* verdadera, por lo que puedes decir que: «*Existe un x, que pertenece a U, tal que Vx es verdadera», y lo expresas así:* $\exists\ x \in U : Vx$.

$\exists$

La expresión ***«Existe un...»*** se simboliza $\exists$, y representa el *Cuantificador Existencial***,** y expresa que lo que se coloca a su derecha es válido para algún o algunos de los elementos del conjunto de referencia.

La mayoría de los asambleístas son seguidores de Cristo, aquí te indica que algunos siguen a Cristo y otros no.

I.5 Operaciones con los Conjuntos.

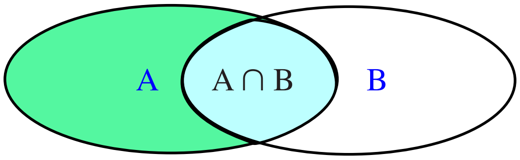
Intersección de Conjuntos.

¿Cuál es la intersección del carril A con el carril B? $\mathbf{A \cap B}$
¿Cuál es la parte común entre carril A y carril B?

Si el carril A representa el conjunto A y el carril B el conjunto B,
¿Cuál es la parte común entre A y B?

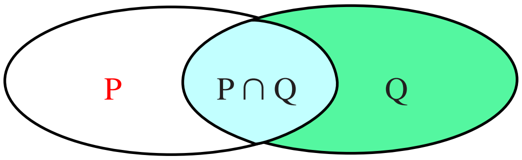
Para representar la intersección entre A y B se utiliza el símbolo ∩. La intersección entre A y B es la parte que se destaca.

$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$



Si $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, entonces
la intersección entre P y Q es: $P \cap Q = \{2, 4, 6\}$

$P \cap Q = \{x/x \in P \wedge x \in Q\}$



Si A = *{x/x es un número primo}* y B = *{x/x es un número par}*,
A = {2,3,5,7,11,13,17,…} B = {2,4,6,8,10,12,14,…}, entonces $A \cap B = \{2\}$

Los elementos comunes de dos o más conjuntos forman el conjunto Intersección.

Para conjuntos A, B y C, no vacíos, se cumplen las ***propiedades*** siguientes:

1. Conmutativas: Si $A \cap B$, entonces $B \cap A$
2. Idenpotente: $A \cap A = A$
3. Asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
4. Absorvente: $A \cap \phi = \phi$
5. Modular: $A \cap U = A$
6. Del Sub-conjunto: $(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$
7. Si los conjuntos son disjuntos, su intersección es el conjunto vacío.

Es el momento de repasar lo aprendido

1. Forma dos conjuntos de tu entorno que tengan elementos comunes:

1. ____
2. ____

2. Si N = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k}, A = {a,b,c,d,f,g}, B = {a,b,c,d,f,g,h,k} y C = {b,d,g,h,i,j}
Determinar el valor de verdad de:

1. $A \subset B$ ☐	6. $\phi \subset N$ ☐	11. $B \cap N = B$ ☐
2. $N \supset C$ ☐	7. $C \subset A$ ☐	12. $A \cap B = A$ ☐
3. $B \subset N$ ☐	8. $(A \not\subset N) \wedge (\phi \in C)$ ☐	13. $C \cap N = C$ ☐
4. $\phi \subset A$ ☐	9. $(B \supset A) \vee (C \subset B)$ ☐	14. $N \cap A = A$ ☐
5. $B \subset C$ ☐	10. $[\phi \not\subset B] \rightarrow [a \in C]$ ☐	15. $A \cap \phi = A$ ☐

3. Dado A = {1,2,3,4,5,6,7}, B = {1,3,5,7,8,9} y D ={2,4,6,7} Determinar por extensión:

1. $A \cap B$ ____________	6. $A \cap \phi$ ____________
2. $D \cap A$ ____________	7. $(B \cap A) \cap D$ ____________
3. $A \cap A$ ____________	8. $\phi \cap (D \cap \phi)$ ____________
4. $B \cap D$ ____________	9. $D \cap (A \cap B)$ ____________
5. $A \cap (B \cap D)$____________	10. $(A \cap \phi) \cap (B \cap \phi)$ ____________

Unión de Conjuntos.

Una cesta de frutas, significa la ***unión*** de muchas frutas:
De la misma forma:

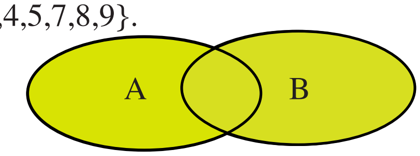
¿Cómo unirías el conjunto C = *{x/x es una consonante castellana}* con el conjunto *V = {x/x es una vocal}*? ¿Qué conjunto resulta?

Pues el conjunto: $C \cup V = \{x/x \in C \vee x \in V\}$

$C \cup V = \{b,c,d,f,g,h,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t,v,w,x,y,z\} \cup \{a,e,i,o,u\} =$
= {x/x es una letra del alfabeto castellano}

Si A ={1,2,3,4,5} y B = {2,4,5,7,8,9}, entonces $A \cup B$ = {1,2,3,4,5,7,8,9}.

La forma $A \cup B$ significa «A ***unión*** B»



Gráficamente es:

Para los conjuntos A, B y C no vacíos, se cumplen las siguientes propiedades:

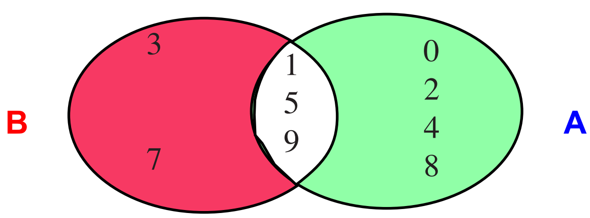
1. **Conmutativa:** $\forall A,B: \ A \cup B = B \cup A.$
2. **Asociativa:** $\forall A,B,C: \ A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
3. **Modulativa:** $\forall A: A \cup \phi = A$
4. **Absorvente:** $\forall A: \ A \cup U = U$, $\forall A: A \cup \phi = A$
   $\forall A,B: \{A \cap (A \cup B) = A \ \wedge \ A \cup (A \cap B) = A]$
5. **Idenpotente:** $\forall A: A \cup A = A$
6. **Distributiva:**
   6.1. La intersección es distributiva con respecto a la unión
   $\forall A,B,C: \ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   6.2. La unión es distributiva con respecto a la intersección.
   $\forall A,B,C: A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
7. Cada conjunto es sub-conjunto de la unión. $A \subset (A \cup B) \ \wedge \ B \subset (A \cup B)$

Diferencia de conjuntos.

Tienes un estante de libros que forman al conjunto A = *{filosofía, idiomas, gramática , biología, matemática, física, química}* y otro estante B = *{ética, sociología, economía, idiomas, biología, ciencias, lenguas}* ¿Cuáles libros están en A que no están en B?

Son: A - B = {
y B - A = {

Del mismo modo ¿Cómo restas B = {1,3,5,7,9} de A = {0,1,2,4,5,6,8,9}?



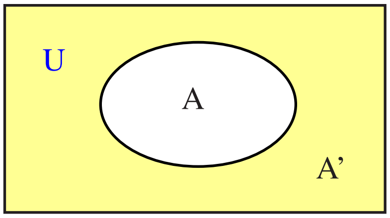
B - A = {

A - B = {

La diferencia es el conjunto A - B que tiene todos los elementos que están en A que no están en B.
A - B = {0,2,4,6,8,} y B - A = {3,7}

$$A - B = \{x/x \in A \wedge \sim(x \in B)\} = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Complemento de un Conjunto.



¿Qué conjunto representa la parte sombreada del diagrama?
¿Cómo nombras ese conjunto?

El conjunto formado con los elementos que les faltan a un conjunto A, para completar un conjunto **U**, es el complemento de A y se expresa así : A', que representa la parte amarilla del gráfico.

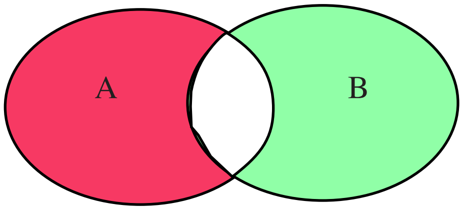
Observa que son los elementos que están en U que no están en A, entonces

$A' = U - A$ también tienes que: $\forall A: \ A \cap A' = \phi \quad \wedge \quad A \cup A' = U$

Diferencia Simétrica de Conjuntos.

¿Cómo determinas los elementos que no son comunes a dos conjuntos A y B no disjuntos?

Este conjunto tiene los elementos que están en $(A \cup B)$ que no están en $(A \cap B)$, o sea, los elementos que están en la ***Unión*** que no están en la intersección y lo puedes expresar así: $A \Delta B$ y lo lees : "A diferencia simétrica B".



$$A \Delta B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\} = \{(A - B) \cup (B - A)\} =$$
$$= \{(A \cap B') \cup (B \cap A')\} = \{(A \cup B) \cap (A' \cup B')\}$$
$$= \{(A \cup B) - (A \cap B)\}$$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Sea: U = {x/x es una letra del alfabeto} A = {a, b, c, d, e, f, g, h} B = {f, h, i, j, k, l, m} C = {b, d, f, k, l, m, n, p}, determina por extensión:

1. $A \cap B$	6. $A' \cap B$	11. $C - A$	16. $[A - C]' \cap B'$
2. $B - C$	7. $A' \cup C$	12. $A' \cup (B - C)$	17. $(B \cup C) - (A \cup C)$
3. $A \cap C$	8. $B' \cap C'$	13. $B \cup (A \cap C)$	18. $[A \cap B]' \cup [B \cap C]'$
4. $A \cup B$	9. $A' \cup C'$	14. $C \cap (A - B)$	19. $(A \cup A')' \cap A$
5. $B \cup C$	10. $A - C$	15. $(A \cap B) \cup [C']'$	20. $[A \cup B]' \cap [A \cup C]'$

2. Si A = {a, b, c, d, e, f, g, h} y U = {x/x es una letra del alfabeto castellano}, determina el valor de verdad de :

1 . ___$A \in 2^A$	4. ___$\{e\} \subset P(A)$	7. ___$\{\{a\}\} \subset 2^A$	10. ___$\{\{b,c\}\} \notin P(A)$
2. ___$A \subset P(A)$	5. ___ $\{a\} \in A$	8. ___$(A \cap A') \supset U$	11. ___$(A \cap A') \subset 2^A$
3. ___$\{A\} \notin P(A)$	6. ___$\{x,y,z\} \subset A$	9. ___$A' \supset 2^A$	12. ___$\{ a,b,c\} \in 2^A$

3. Si U = {x/x es un número natural, donde 0 ≤ x ≤ 15}, A = {0,1,2,3,4,5,6,7}, B = {1,3,5,7,9,11,13} y C = {0,2,4,5,6,7,8,10,12,14}. Dermina por extensión los items impares y por medio diagrama los pares..

1. $A \Delta B$	5. $(C \cup B) \Delta A$	9. $A \Delta (B \Delta C)$	13. $(A - B) \Delta (A - C)$
2. $B \Delta C$	6. $(A \cap B) \Delta C$	10. $(A \Delta C) \cap C'$	14. $(A \Delta C) \cap (B - C)$
3. $C \Delta A'$	7. $(A - B) \Delta C$	11. $(B \Delta A) \cup C'$	15. $(A \cup B)' \Delta (B \cap C)'$
4. $(B \Delta C)'$	8. $(A \Delta B) \cup C$	12. $B' \cup (B \Delta C)$	16. $(A - B)' \cup (B - A)$

I.6 Técnica de Conteo.

Puedes ahora contar el número de elementos de un conjunto, el número de formas en que una determinada situación ocurre, etc.

Si tienes un conjunto $A = \{2,4,6,8\}$ y $B = \{1,3,5,7,9\}$ y deseas juntar sus elementos en un sólo conjunto ¿Cuántos elementos tiene el nuevo conjunto ? Pues, cuenta los elementos de A, que te darán $|A| = 4$, y los elementos de $|B| = 5$, menos los elementos comunes a ambos conjuntos $|A \cap B| = 0$, entonces el número de elementos de los dos juntos es:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 5 - 0 = 9$$

Puedes probar que: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, entonces el número de elementos es:

$$|A \cup B| = 9$$

Si ahora tienes los conjuntos A = *{a,b,c,d,e}* y B = *{b,c,f}* y quieres hallar el número de elementos que tiene : $A \cup B$, entonces debes encontrar el número de elementos de A, más el número de elementos de B, menos los elementos comunes entre A y B.

Solución : El número de elementos de A es $|A| = 5$, el número de elementos de B es $|B| = 3$, el número de elementos comunes $A \cap B$ es $|A \cap B| = 2$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 3 - 2 = 6$, que lo compruebas cuando hallas: $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$, tiene 6 elementos. Pero ¿Dónde puedes aplicar esto en la vida diaria?

Si tu curso tiene 32 alumnos y 24 liberan matemática y 28 liberan sociales y 3 no liberan estas materias. ¿Cuántos alumnos liberan las dos asignaturas?

Solución: Como tres no liberaron ni matemática, ni sociales, entonces los que liberaron estas asignaturas son : 32 - 3 = 29.

Si A = *{x/x es alumno que liberó matemática}* y B = *{x/x es alumno que liberó sociales}*, entonces:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ pero recuerda que vas a encontrar ¿Cuántos compañeros liberaron ambas materias, o sea $|A \cap B|$, pero $|A| = 24$ y $|B| = 28$ y como : $|A \cap B| = 32 - 3 = 29$ es decir, los que liberaron son todos los estudiantes menos los que no liberaron, puedes sustituir y obtener :

$29 = 24 + 28 - |A \cap B|$ de donde: $|A \cap B| = 24 + 28 - 29 = 23$
Lo que significa que 23 alumnos liberaron ambas materias.

¿Cuántos liberaron únicamente matemática? $|A| - |A \cap B| = 24 - 23 = 1$
y los que liberaron sociales únicamente fueron: $|B| - |A \cap B| = 28 - 23 = 5$

Si tienes que encontrar el número de tres conjuntos, aplicas el mismo procedimiento:

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup [B \cup C]| = |A| + |B \cup C| - |A \cap [B \cup C]|$$

Ya sabes que : $|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|$ y por la propiedad distributiva tienes que :

$$|A \cap [B \cup C]| = |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Sustituyendo por su igual obtienes :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Para determinar el nivel de popularidad de los programas de televisión se seleccionaron tres programas A, B y C de horas diferentes para hacer un sondeo en un máximo de 100 familias escogidas en diferentes puntos. Hubo 38 que ven el programa A, 42 el B, 24 el C; 12 ven A y B; 18 A y C y 15 ven B y C. ¿Cuántas personas ven los tres programas? ¿Cuántas ven cada programa exclusivo?

Solución: Como $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap| + |A \cap B \cap C|$
y $|A| = 38$, $|B| = 42$, $|C| = 24$, $|A \cap B| = 12$, $|A \cap C| = 18$, $|B \cap C| = 15$, entonces:
$100 = 38 + 42 + 24 - 12 - 18 - 15 + |A \cap B \cap C|$
$100 = 59 + |A \cap B \cap C|$ de donde $|A \cap B \cap C| = 100 - 59 = 41$
son los que ven los tres programas.

Los que ven el programa A, son: $|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$=38 - 12 - 18 + 41 = 49$

Los que ven el programa B, son: $|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$= 42 - 12 - 15 + 41 = 56$

Los que ven el programa C, son: $|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$
$= 24 - 18 - 15 + 41 = 32$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Realiza una encuesta en tu curso y cuenta: los compañeros que están liberando matemática, los que liberan español y los que liberan naturales, los que liberan matemática y español, los que liberan matemática y naturales y los que liberan español y naturales, entonces determina ¿Cuántos liberan las tres materias ? ¿Cuántos liberan una sola de estas ? [Sugerencia: Ten en cuenta que si un alumno libera dos materias debes contarla por materia]

En una agencia de vehículos las preferencias se detallan así: 40 prefieren carros de 4 puertas, 30 optan por vehículos de 2 puertas y 100 eligen guaguas de 16 pasajeros; dentro de los cuales, 15 elegirían carros de 4 puertas o de 2 puertas, 20 no tienen inconvenientes en que sea de 4 puertas o guaguas, 10 optan por carros de 2 puertas o guaguas y 5 podrían elegir cualquiera de los tres. ¿Con cuántas personas la agencia hizo este sondeo?

I.7 Codificación.

¿Qué es la criptografía?

Si vas de tienda puedes notar que en la etiqueta donde aparece el precio de venta, aparecen además unas letras. Estas letras son claves o códigos que utiliza el comerciante para conocer el costo de la mercancía que te vende.

Hay maletines que utilizan códigos. ¿Cómo codificarías?

Si quieres sustituir los números por letras puedes establecer ciertas reglas, a los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, les hace corresponder una letra *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j* entonces puedes escribir el número 8340 como *idea*.

Si $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \equiv \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\} \equiv \{k,l,m,n,ñ,o,p,q,r,s\}$, entonces codifica :

Por el camino de la realidad	**Si amas a Cristo entonces serás libre**
658 41 202835 34 10 84018303	98 0209 0 2889t5 43t53249 94809 18184

En los negocios a veces usan la palabra *Murciélago* que abarca todos los dígitos del 0 al 9, acompañado a veces de otra letra, por ejemplo *n*, que indique la repetición del dígito anterior.

M u r c i é l a g o	M u r c i é l a g o
0 1 2 34 56 7 8 9	9 8 7 65 43 2 1 0

Codifica : 850.00 =	850.00 =
María =	María =
659n56 =	340n43 =

¿Cómo decodificas? Pues, negando con cualquier indicación la validez de la codificación establecida, puedes usar ~ que significa *no*.

Puedes crear tu propio sistema de codificación, cada quien lo utiliza para proteger sus intereses.
¿Dónde utilizan códigos?

El Código de la ***Tarjeta de Crédito*** es un sistema de signos y reglas que te permite formular y comprender un mensaje.

Si tienes una computadora puedes usar un nombre o número clave que te permita únicamente a ti penetrar a determinados programas.

Los supermercados y farmacias utilizan máquinas registradoras codificadas.

Puedes usar un código para abrir la puerta de tu cuarto, o para tocar en tu casa, o para decirle a un amigo que el mensaje es correcto.

Los Códigos de Barras.

Has observado en los supermercados cuando vas de compra que pasan los productos por un lector óptico. Este lector identifica unas barras que traen impresas las mercancías, estos son Códigos de Barras, que sirven para identificar una gama de productos. Este complejo sistema de codificación que representa números de 13 dígitos, relaciona los dibujos de líneas oscuras y claras con el número que representan y con un producto determinado.

Es el momento de practicar lo aprendido

Invéntate un sistema de codificación con *Hipócrates* sustituye por la numeración del 0 al 9 y del 9 al 0, al escribir centavos, sepáralos con un apóstrofe de las demás letras, o con la marca que desees. Utiliza una letra que indique la forma de repetición de números.

Número	**Código**	**Decodificación**	**Número**	**Código**	**Decodificación**

AUTOEVALUACIÓN

Repasa lo aprendido:

Selecciona la respuesta correcta.

1. Una colección de objetos bien definida, la consideras como:
   a) grupo b) reunión c) conjunto

2. Un conjunto queda expresado cuando sus elementos aparecen entre:
   a) corchetes b) llaves c) paréntesis.

3. Puedes expresar un conjunto por:
   a) extensión b) comprensión c) a y b son correctas

4. Cuando un elemento pertenece a un conjunto se usa el signo
   a) $\in$ b) $\wedge$ c) $\in$

5. Los conjuntos los representas por letras del alfabeto en:
   a) minúscula b) mayúscula c) ambas son correctas

6. Para referirte a elementos utilizas letras del alfabeto en:
   a) minúscula b) mayúscula c) ambas son correctas

7. Los conjuntos que no representan colección los clasificas como:
   a) unitario b) vacío c) ambas son correctas

8. Cuando los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto, dices que el:
   a) primero pertenece al segundo b) primero es parcial al segundo.
   c) segundo contiene al primero. d) b y c son correctas.

9. Cuando $A \subset B \wedge B \subset A$ entonces dices que A y B son:
   a) iguales b) idéntico c) del mismo tamaño

10. Las propiedades que se cumplen en la igualdad son:
    a) reflexiva b) simétrica c) transitiva d) todas son correctas

11. El conjunto que tiene un número definido de elementos, es:
    a) infinito b) finito c) comparable

12. Un conjunto puedes representarlo por:
    a) un polígono b) figura geométrica plana c) diagramas d) todas V

13. Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes se llaman:
    a) disconexos b) disjuntos c) $a \wedge b = V$ d) iguales

14. El conjunto que formas con los elementos comunes a dos o más conjuntos, es:
    a) disconexo b) disjunto c) finito d) intersección

15. Si tienes un conjunto con los elementos necesarios para hacer un estudio, entonces es:
    a) parcial b) general c) Universal d) particular

16. Si tu mochila tiene varios conjuntos, entonces la mochila es:
    a) clase de conjuntos b) familia de conjuntos
    c) conjunto de conjuntos d) todos son correctos

17. Si aparece un conjunto que tiene todos los elementos que les faltan a otro para ser Universo, entonces ese conjunto es el:
    a) Universo b) potencia c) complemento d) vacío

18. El conjunto que tiene todos los elementos de A y todos los elementos de B, lo expresas:
    a) $A \wedge B$ b) $A \cap B$ c) $A \cup B$ d) $A \vee B$

19. El conjunto cuyos elementos son todos los elementos que están en la Unión de dos conjuntos que no están en la intersección, forma su:
    a) diferencia b) intersección c) diferencia simétrica d) conteo

20. En la técnica de contar los elementos de los conjuntos, debes tener en cuenta la propiedad:
    a) conmutativa b) distributiva c) asociativa d) $b \wedge d = V$

21. Si A = {x/x es un poder del Estado}, entonces el Poder Ejecutivo es:
    a) parcial de A b) igual de A c) elemento de A d) $a \wedge c = V$

22. Dominicana y Haití forman dos conjuntos:
    a) iguales b) disjuntos c) comparables d) simétricos

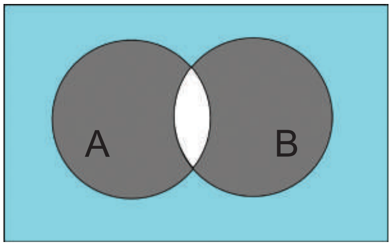
23. El comercio organizado utiliza cajas registradoras programadas, con los precios representados por:
    a) claves b) códigos c) números y letras d) siglas

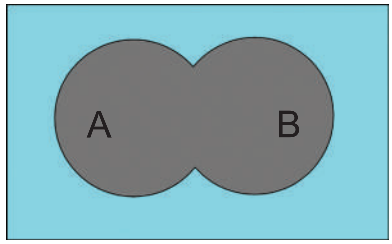
24. La codificación puedes hacerla:
    a) alfabética b) numérica c) alfanumérica d) todas V

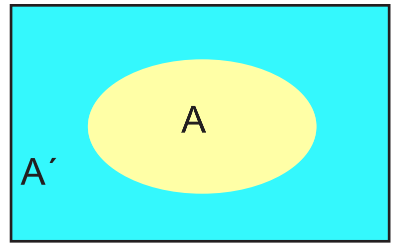
25. Coloca en las columnas de la derecha el número que corresponda al concepto de la columna de la izquierda

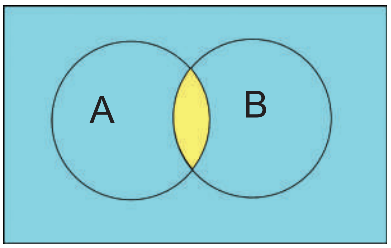
Termino/concepto		Descripción verbal		Expresión matemática
1º Conjunto		componentes de un conjunto		U= {x/x es una letra del alfababeto}
2º Es concepto primitivo		característica de componentes		Vx: x es una vocal
3º Elementos		una parte de un conjunto		$a \in Vx$; $m \notin Vx$, $h \in U$
4º Conjunto por comprensión		con los mismos elementos		$\exists\, x \in U : Vx$.
5º Conjuntos iguales		una colección		$V_b=\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$
6º Subconjunto		abarca todos los elementos		$Vx=\{a, e, i, o, u\}$
7º Cuantificador universal		conjunto sin elementos		$\phi \neq 0 \neq \{0\}$
8º Partencia; no pertenencia		cita todos los elementos		$\forall x \in U : Vx$
9º Cuantificador existencial		que está incluido en un conjunto		Vx={*x/x* es una vocal}
10º Conj. vacío/ diferencias		válido para la totalidad		$A \subset B$; $Vx/[x \in A \rightarrow x \in B]$
11º Conjunto por extensión		Existe algún válido en U.		$A =\{a, e, i, o, u\}$
12º Card (A)		lo común entre dos conjuntos		$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
13º Unión de conjuntos		Un nuevo conjunto formado por dos o más conjuntos		$C \cup V$={conson}$\cup$ {vocales} = {letras del alfabeto}
14º Diferencia simétrica		lo que le falta a A para completar U		**A’** $=U-A$; $A \cup A'=U$ $\forall A: A \cap A'=\phi \wedge A \cup A'=U$
15º Diferencia de conjuntos		señalar elementos que están en un conjunto pero no en el otro		$A-B=\{x/x \in A \wedge \sim(x \in B)\} = \{x/x \in A \wedge x \notin B$.
16º complemento		El número de elementos propios de un conjunto		$A\Delta B = \{x/x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}=$ $\{(A - B) \cup (B - A)\} =$ $\{(A \cap B') \cup (B \cap A')\}$
17º tecnica de conteo		Determinar el número de elementos de un conjunto, o el número de formas en que ocurren en una situación,		$\|A \cup B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cap B\| = 4 + 5 - 0 = 9$. para $A=\{2,4,6,8\}$ y $B=\{1,3,5,7,9\}$
18º intersección de conjuntos		los elementos que no son comunes a dos conjuntos A y B, no disjuntos		**Vx/x vocales, Card=5**
19º codificar, código de barras		Crear un conjunto de letras y/o números asociados por una regla, utilizada para identificar elementos y que está limitado su acceso por un código.		A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}={letras del alfabeto Por el camino de la realidad 658 41 202835 34 10 84018303
20º propiedades de conjuntos		9-1 Conmutativa 9-1 Modulativa 9-2 Distributiva		$\forall A : A \cup \phi = A$ $\forall A,B : A \cup B = B \cup A$ $\forall A,B,C : A \cap (B \cup C) =(A \cap B) \cup (B \cap C)$

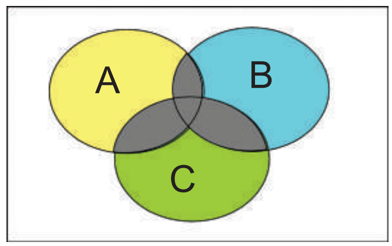
26. Debajo de cada Diagrama coloca la operación que indica lo sombreado y escribe la forma matemática de indicarlo.







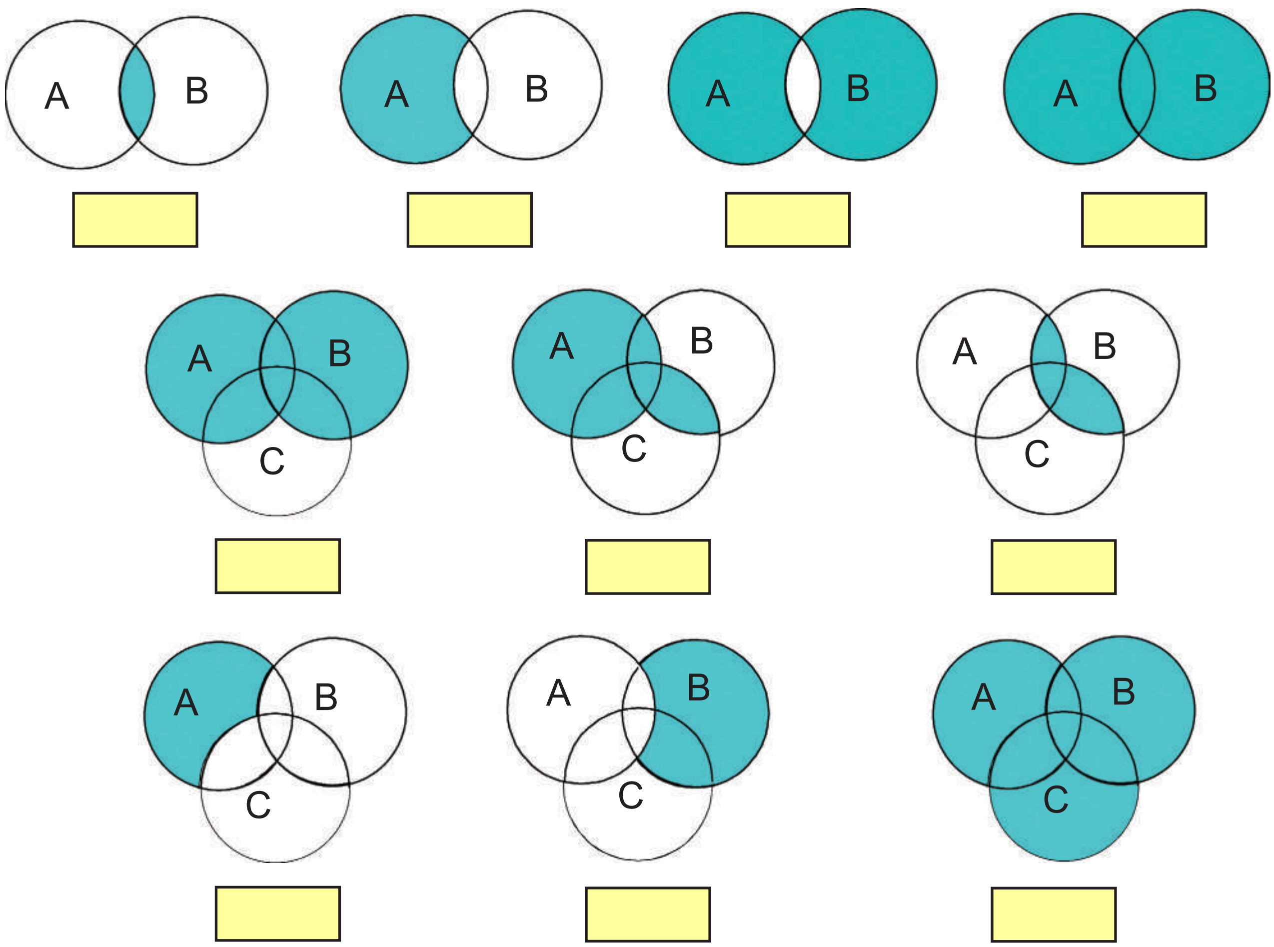




27. En la columna de la derecha coloca el número que corresponde a la expresión de la columna de la izquierda.

1.- $A \cap B$	____	La intersección de la unión del conjunto A con el conjunto B, con la unión A con el conjunto C.
2.- $A \cup B$		
3.- $A - B$	____	Diferencia simétrica entre A y B.
4.- $A \cup (B - C)$	____	El conjunto A menos la unión de B y C.
5.- $A \cup (B \cap C)$	____	Restar la unión de A con C de la unión de B con C.
6.- $A \Delta B$	____	La suma de A con la intersección de B y C.
7.- $(A \cap B) \cup [B \cap C]$	____	La intersección entre A y B.
8.- $A - (B \cup C)$	____	Sumar la intersección de A y B con la intersección de B y C
9.- $(B \cup C) - (A \cup C)$	____	La suma de A con B.
10.- $[A \cup B] \cap [A \cup C]$	____	Restar la unión de B con C de A.

29. Coloca en el cuadrito el número que corresponda a lo que indica cada expresión del punto anterior.



30. Para los conjuntos A y B, indica las condiciones necesarias para que cada una de las expresiones siguientes sea verdadera.

1.- $A \cap B = \varnothing$	2.- $B \cap \varnothing = B$	3.- $A \cap \varnothing = \varnothing$
4.- $A \cap A' = \varnothing$	5.- $B \cap B = \varnothing$	6.- $A \cap B = A$
7.- $A \cup A = A$	8.- $A \cup \varnothing = \varnothing$	9.- $B \cup B = \varnothing$
10.- $B \cup \varnothing = B$	11. - $A \cup A' = U$	12.- $A = A - B$
13.- $A = B - A$	14.- $B = B - \varnothing$	15. - $A = \varnothing - A$

UNIDAD II

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1º Objetivos específicos.

En esta segunda unidad del "Curso universitario de nivelación" que lleva el título "conjuntos numéricos" se busca desarrollar uno de los dos niveles más característicos del funcionamiento intelectual del ser humano actual, es decir, el nivel, evolutivamente hablando, más avanzado del pensamiento humano, como es la *capacidad de tomar conciencia de los procesos mentales*. Lo que implicar diferenciar y automatizar los pasos que los alumnos deben dar para: solucionar planteamientos matemáticos, explicarlos a los demás, sistematizarlos en una secuencia, comparar entre sí las secuencias del resto de compañeros del grupo, obtener una generalización de estos procesos mentales y desarrollar su aplicación a otros casos de la vida práctica.

La ejecución de esta clase de ejercicios implica alcanzar el vértice más alto de la inteligencia humana, para cuya ejecución es necesario activar el funcionamiento de un conjunto de áreas cerebrales, que los autores las localizan en la zona de los lóbulos frontales.

Este tipo de procesos mentales puede ser desarrollado con varios grados de dificultad, al utilizar contenidos: aritméticos, verbales, como los problemas; quebrados como proporciones, gráficos o figuras.

2º Sistematización de los pasos a seguir en los ejercicios de esta unidad:

1º El grupo total de la clase se debe dividir en pequeños grupos de 6 a 8 alumnos, a los que se les indicará que resuelvan uno de los ejercicios de las secciones del libro tituladas: "Es el momento de practicar lo aprendido"

2º Cada alumno intenta *resolver el ejercicio* por sí mismo.

3º Una vez lo hayan resuelto, se les indica que intenten *hacer un introspección sobre la actividad mental* que han realizado, y que escriban en un papel los pasos secuenciados que han dado para resolver el ejercicio.

4º Después cada uno de los alumnos dentro de su grupo *dará el listado* de pasos que cree que ha dado para resolverlo. Es importante que los alumnos puedan apreciar que existen diversos caminos o soluciones para resolver el ejercicio. Todos son buenos si se resuelve bien lo que pide el ejercicio.

5º Posteriormente el grupo intentará *sistematizar en una secuencia* lógica y sucesiva los pasos que se pueden dar para resolver el ejercicio.

6º Un alumno de cada grupo *indicará al total de la clase la sistematización* que han logrado construir en cada grupo.

7º Luego toda la clase hará el intento para *definir la clase de actividad mental* que se ha hecho para resolver este ejercicio, y *darle un nombre*.

8º Finalmente, se intentará buscar aplicaciones posibles de esta metodología y conclusiones a otras situaciones de la vida.

3º Pasos para resolver problemas matemáticos verbales

Para resolver problemas matemático-verbales se recomienda dar los siguientes pasos:

a. Se inicia el ejercicio leyendo el texto del problema, y fijándose en las palabras claves: paquetes que tengan el mismo número de monedas,

b. Relacionar el problema con la información de los sub-temas que se tienen de la unidad II, que en este caso, el ejercicio de la pag. 34 corresponde a divisibilidad (MCD y MCM).

c. Tomar la decisión adecuada sobre una de las opciones propuestas (MCD y MCM), expresando razones a favor de la decisión tomada.

d. Identificar los elementos matemáticos pertinentes.

e. Resolver el problema matemáticamente de acuerdo a la decisión tomada.

f.- Una vez resuelto el problema, se invita a los alumnos a reflexionar haciendo una introspección de la actividad mental que han realizado, y a escribir en un papel los pasos secuenciados que se han dado para resolver el ejercicio.

g.- Después, cada uno de los alumnos del grupo *presentará el listado de pasos* que cree que ha dado para resolverlo. Es importante que los alumnos puedan apreciar que existen diversos caminos o soluciones para resolver el ejercicio y que todos son buenos si se resuelve bien.

h.- Luego, el grupo intentará *sistematizar en una secuencia lógica* o temporal los pasos que se pueden dar para hacer el ejercicio.

i.- Un alumno de cada grupo *presentará al total de la clase la sistematización* que han logrado construir en cada grupo.

j.- Luego toda la clase hará un intento para definir la clase de actividad mental que se ha hecho para resolver este ejercicio, y le darán un nombre.

k.- Finalmente, se intentará buscar posibles aplicaciones de la metodología y conclusiones a otras situaciones de la vida.

Todos los pasos referenciados anteriormente se encaminan a obtener una *percepción clara y consciente de sí mismo*. Se está, pues, en el vértice más alto de la inteligencia humana. El trabajo realizado en esta unidad pone en funcionamiento todas las áreas cerebrales.

UNIDAD II

CONJUNTOS NUMÉRICOS

II.1 Los Números.

¿Cuántos dedos tienes en las dos manos?

¿Cuántas teclas tiene el teclado?

¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

Como puedes apreciar, el número es una idea, que siempre va asociada a un objeto o elemento.

Estas ideas se representan por figuras o gráficos que se llaman numerales. Diez dedos de las manos se representa por 10 en el sistema arábigo, pero en el sistema romano se representa por X.

II.2 Conjunto de los Números Reales.

Los conjuntos numéricos son:

NATURALES
NEGATIVOS } ENTEROS

ENTEROS
FRACCIONARIOS } RACIONALES

RACIONALES
IRRACIONALES } REALES

II.2.1 Números enteros.

El conjunto de los números naturales nace con el ser humano, por tanto, es producto de la naturaleza. Pero este conjunto se define mejor por sus propiedades que indican:
que el 0 es el primero de los números naturales y no tiene precedente; para todo número natural siempre habrá otro que es siguiente a este; el conjuntos de los números naturales es infinito.

$0 \in N$

si $x \in N$ $x + 1$ N

Las operaciones matemáticas son:

DIRECTAS	INDIRECTAS
SUMA	RESTA
MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
POTENCIACIÓN	RADICACIÓN
	LOGARITMACIÓN

La primera operación matemática es la suma, y por tanto, es una operación natural, porque siempre que los sumandos son naturales el resultado, llamado suma o total, es un número natural. Esto pasa también con la multiplicación y con la potenciación.

Los componentes de la suma son: sumando + sumando = suma o total.

5 – 12 = - 7

minuendo – sustraendo = resta

La operativa del hombre hace que surjan los diferentes conjuntos numéricos. Por ejemplo, con los números naturales se pueden realizar todas las operaciones, pero no siempre se obtiene un número natural. Al restar el número natural 12 de otro número natural, 5, no se obtiene un número natural, por tanto, la resta permite ampliar este conjunto numérico, y así nace el conjunto de los números negativos:

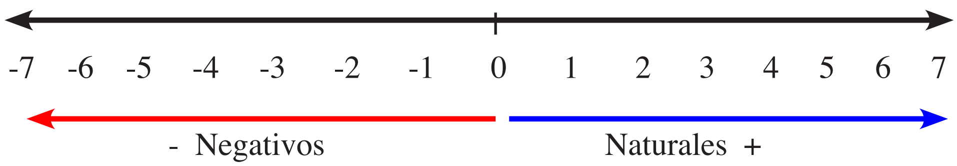
Con los números negativos nacen las cantidades que están formadas por cantidadeds positivas o cantidades negativas:

Las cantidades positivas indican pertenencias, todo lo que a ti te pertenece es una cantidad o cosa positiva, ahora bien, todo lo que tienes, pero que no te pertenece, es una cantidad o cosa negativa.

La unión entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números negativos forma el conjunto de los números enteros.

$$\left.\begin{array}{l}\text{NATURALES}\\ \\ \text{NEGATIVOS}\end{array}\right\}\ \text{ENTEROS}$$

El conjunto de los números enteros se grafica así:



Para operar con los números enteros hay que tener en cuenta que los signos que separan un número de otro son los signos: positivo (+) o negativo (-).

Conjuntos de números:
Números naturales N = {1, 2, 3, 4, . . . }
Números enteros no negativos Z+ = {0, 1, 2, 3, 4, . . .}
Números enteros no positivos Z- = {0, -1, -2, -3, -4, . . .}
Números enteros Z = {. . . -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .}

La suma de los *n* primeros números naturales impares equivale a *n* al cuadrado:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Del mismo modo:

La suma de los *n* primeros números naturales es igual a:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + \ldots + n = n/2\,(n + 1)$$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Un chofer alquila una guagua a razón de RD$3,500.00 diarios; gasta RD$800.00 de gasoil, y un día monta 560 pasajeros a razón de RD$15.00 cada uno. Paga RD$850.00 al ayudante. ¿Cuánto se ganó ese día?

2. Un niño tiene 10 pesos en monedas de 25 centavos ¿Cuántas monedas tiene?

3. Si por cada dólar pagas 34 pesos. ¿Cuántos dólares te cuesta una nevera de 15,800 pesos?

4. Indica la relación que existe entre los números: 6712, 671.2, 67.12, 67120, 671200.

5. Encuentra el valor de un sombrero que se vendió en $150.00 perdiendo $40.00.

6. En un estadio dos personas, A y B, aplauden. A da palmadas cada 4 segundos y B las da cada 5 segundos ¿Cuántos segundos pasan para que coincidan las palmadas de A y B?

7. Emilia quiere comprar bombillos de bajo consumo y dispone de RD$550.00, si cada bombillo cuesta $48.00 ¿Puede gastar todo el dinero en bombillos sin tener sobrantes?

8. Guillermo y Weedys están en el sótano de un edificio y suben 7 pisos ¿En que piso se encuentran ahora?

9. Cuántos años duró Pitágoras si nació en el 279 a. C. y murió en el 500 a. C.?

10. En el Metro de Santo Domingo puedes hacer el recorrido completo por $30.00, si antes gastabas 6 pasajes de $20.00 cada uno, para hacer el recorrido completo. ¿Cuánto te ahorras por pasaje?

11. Completa los cuadritos siguientes…

    1. 3 + 6 - 9 + (-7) - (-8) + 3(-5) - 12 = $\boxed{}$
    2. -12 + 3 x 5 - 8 ¸ 2 + 24 x 5 ¸ 6 + 45 = $\boxed{}$
    3. (-5 - 3)(-4 + 8) - 6(9 - 3)2 - 5(6 + 2)3 = $\boxed{}$
    4. 3[9 - 5] + 5{23 - 9}2 - 8[4 - 9] + 4(7 + 2)= $\boxed{}$
    5. [4 x 5 x 6]¸3 - [8 x 7 x 40]¸5 + [7 + 12 - 3]¸4 = $\boxed{}$
    6. (5 x 2 x 3)¸2 + 13 x 8 x 5 x 2 ¸ 4 - 8 x 7 x 3 ¸ 12 = $\boxed{}$
    7. 15 x 3 ¸ 5 + 25 x 12 ¸ 6 - 6 x 9 x 7 ¸ 12 = $\boxed{}$
    8. 3{4(5 - 5) + 5(6-2) - 7(8 - 3) + 3(23 - 18)2} = $\boxed{}$
    9. 8 + $\boxed{}$ - 9 = 16 $\boxed{}$
    10. $\boxed{}$ – 14 + 32 =

11. 9 x ☐ + 8 = 53
12. 15 ÷ ☐ = 75
13. 18 – 32 + 21 = ☐ - 6
14. ☐ – 12 + 43 – 29 = ☐ + 14
15. (-12) + ☐ - (-9) = 15
16. Encuentra la suma de los 15 primeros números impares.
17. Encuentra la suma de los primeros 200 números.
18. Si la suma S = n/2(n +1), si n = 899 ¿Cuál es el valor de S.
19. Si para cualquier número natural n se cumple que: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + n^3$ encuentra el cuadrado de la suma de los 5 primeros números naturales.
20. Aplicando la fórmula anterior busca la suma de los cuadrados de los 10 primeros números naturales.

José le dice a Manuel, nos ganamos $10.00, divídelo de forma que te toque un peso más que a mí ¿Cuánto le tocó a cada uno?

José + Manuel = $10.00, pero Manuel tiene lo que le toca a José más un peso, entonces J + M = 10

J + J + 1 = 10.00, entonces

José tiene 5½ y Manuel tiene 4½

II.2.1.1 Teoría de los números.

Divisibilidad.

El número natural *a* es divisible entre el número natural *b* si existe un natural *k* tal que *a* = *kb*. Informalmente diremos que un número divide a otro si el primero entre el segundo da un resto cero. Así, por ejemplo, 3 divide a 12. Decimos que 3 es factor o divisor de 12 y que 12 es um múltiplo de 3.

Número Primo

Un número natural mayor que 1, que solo tiene al 1 y a el mismo como divisor, se llama ***primo***. Si el número natural no es primo se le llama ***compuesto***.

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12; por tanto no es primo.

Los divisores de 17 son 1 y 17 por tanto 17 es primo.

Todo número natural se puesde expresar como el producto de sus factores primos, de manera unica.

Ejemplo:

1. Los factores primos de 12 son 2 x 2 x 3 = 2^2 x 3 y la factorización prima de 504 es 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 7 o sea 2^3 x 3^2 x 7, lo que significa que 504 = 2^3 x 3^2 x 7

Máximo Común Divisor o Máximo Factor Común (MCD)

El Maximo Común Divisor de un conjunto de números naturales es el número natural más grande que es factor de todos los números del conjunto.

Para determinar el Máximo Común Divisor de un conjunto de números debes:

1. Escribir la factorizacion prima de cada número, luego seleccionar los factores comunes a todas las factorizaciones, y entonces elegir solamente cada factor primo con su exponente más pequeño. Luego el producto de estos factores comunes es el MCD.

Ejemplo:

El MCD de (360, 2700) es 180, porque 360 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 2^3 x 3^2 x 5
y 2700 = 2 x 2 x 3 x 3 x 3 x 5 x 5 = 2^2 x 3^3 x 5^2 , entonces se eligen los factores comunes 2, 3 y 5 con sus menores exponentes, o sea: 2^2 x 3^2 x 5 = 180.

Mínimo Común Múltiplo (MCM)

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de un grupo de números naturales es el número natural más pequeño que es múltiplo de todos los números del grupo.

Los múltiplos de 2 son: 2, 4, 6, 8, 10, 12, … y los múltiplos de 6 son: 6, 12, 18, 24, 30,… entonces los múltiplos comunes son: 6, 12, …., como el menor múltiplo común es 6, entonces el mínimo común múltiplo de 2 y 6 es 6.

Si deseas determinar el mínimo común múltiplo de varios números, tienes que tener encuenta:

1. Escribir los factores primos de cada número, luego seleccionar los factores primos comunes y no comunes de dichos factores con su mayor exponente, entonces se forma el producto de estos factores y éste es el Mínimo Común Múltiplo.

Ejemplo:

El MCM de (35, 280, 300) es 37,800, porque : $135 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 = 3^3 \times 5$
$280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5 \times 7$
$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5^2$
Ahora se eligen todos los factores, pero los que
son comunes se consideran con su mayor exponente, así: $2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 = 37{,}800$.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. ***Determina la factorización prima de cada número.***

a.-210	b. 182	c. 2,310	d. 1,155
e. 1,500	f. 2,000	g. 13	h. 240
i. 300	j. 360	k.663	l. 885

2. ***Halla todos los factores o divisores de los siguientes números.***

a. 93	b. 35	c. 91	d. 52
e. 100	f. 441	g. 726	h. 1,690
i. 36	j. 48	k. 220	l. 284

3. ***Determina el máximo común divisor de cada conjunto de número.***

a. 70 y 120	b. 180 y 300	c. 480 y 1800	d. 252, 308 y 504
e. 60 y 84	f. 310 y 460	g. 12, 18 y 30	h. 450, 1500 y 432
i. 210 y 560	j. 180,210 y 630.		

4. ***Halla el mínimo común múltiplo de cada grupo de números.***

a. 24 y 30	b. 12 y 32	c. 56 y 96	d. 28 y 70
e. 24 y 32	f. 30, 40 y 70	g. 24, 36 y 48	h. 48, 54 y 60
i. 16, 120 y 216	j. 210, 300 y 720		

5. ***Ariel y Junior trabajan como guardias de seguridad de un banco; Ariel tiene descanso cada seisnoches y Junior descansa cada diez. Si los dos descansaron el primero de Mayo ¿Cual será la próxima noche en que ambos descansos coincidirán?***

6. ***Rosmery tiene 240 monedas de un peso y 288 monedas de a 5 pesos. Quiere formar paquetes que obtengan el mismo número de monedas de una misma denominación.¿Cuál es el número más grande de monedas que puede colocar en cada paquete?***

7. Miguel vendió algunas mascotas a 24 pesos cada una y obtuvo dinero para ir a un centro de Internet que cuesta 50 pesos la hora, si gastó todo su dinero. ¿Cuál es el número mínimo de mascotas que pudo haber vendido?

8. Un carpintero tiene tablas de diferentes tamaños. Algunas son de 60 pulgadas de largo y otras son de 72. El quiere cortarlas para obtener piezas de igual tamaño. Cuál es la longitud mayor de las piezas que puede cortar sin desperdiciar ningún pedazo?

II.2.2 Números Racionales.

Cuando divides un entero entre otro entero puedes obtener un entero. Por ejemplo. 12 entre 4 es igual a 3, - 42 entre 7 = -6, 35 entre -5 es igual a -7, -39 entre -3 es igual a + 13, pero no siempre es así.

$12 \div 4 = 3$
$-42 \div 7 = -6 \ \wedge \ 35 \div -5 = -7$
$-39 \div -3 = +13$

Ejemplo:

Grisel desea repartir $3.00 entre 4 empleados

3.00 ÷ 4 = 0.75 centavos. Este es un número fraccionario, que puede expresarse así: ¾, este número tiene un significado y un nombre (quebrado, porque está partido por una raya), y se lee 3 de 4, lo que indica que el 3 es la cantidad que numera y 4 es la cantidad que denomina, por esto el 3 es el numerador y el 4 es el denominador.

Cuando los 75 centavos se expresan asi: 0.75 recibe el nombre de decimal.

Significa que los números fraccionarios están formados por quebrados y decimales.

Los números fraccionarios se clasifican en:

- FRACCIONARIOS
  - QUEBRADOS
    - PROPIOS
    - IMPROPIOS
  - DECIMALES
    - EXACTOS
    - PERIÓDICOS
      - PUROS
      - MIXTOS

La unión de los números enteros con los Números fraccionarios, forma el conjunto de los Números racionales.

$$\left.\begin{array}{l}\text{ENTEROS}\\ \text{FRACCIONARIOS}\end{array}\right\}\text{RACIONALES}$$

Si deseas expresar la tres cuartas partes de un peso como decimal, divides 3 entre 4, así:

.

3 entre 4 no cabe, escribo 0., y agrego 0, entonces 30 entre 4 es igual a 7, 7 por 4 30 menos 28 = 2, agrego 0 y digo 20 entre 4 = 5, 5 por 4 veinte, 20 -20 = 0

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} 30 & 0.75 \\ \underline{-28} & \\ \underline{20} & \\ 0 & \end{array}$$

significa que ¾ = 0.75

Del mismo modo 0.75 = ¾, si deseas expresar 0.75 como quebrado, solo tienes que colocar el 75 como numerador y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el numerador, así:

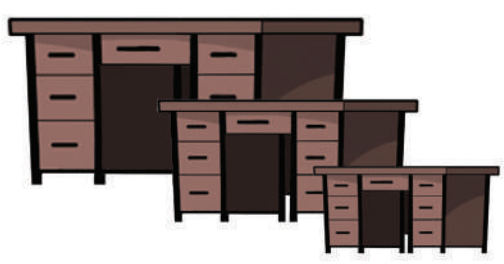
0.75 = 75/100
= 75/100 = 15/20 = ¾

Entonces, como el numerador termina en 5 y el denominador termina en cero, ambos pueden dividirse entre 5, entonces 75 entre 5 = 15 y 100 entre 5 = 20, luego 15 entre 5 es igual a 3 y 20 entre 5 igual 4, es decir 0.75 = ¾.

Para convertir decimales en quebrados debes saber que los números que terminan en cero y número par pueden dividirse entre dos, y los números que al sumar sus cifras dan como resultado un número que puede dividirse por 3, entonces ese número se puede dividir por tres.

Proporcionalidad.

¿Qué significa comparar?



Si comparas los tamaños de los escritorios que indica la figura, significa que tiene que buscar una razón de proporcionalidad entre ellos.

Del mismo modo, si deseas comparar la longitud *a* con la longitud b, que son medidas de una misma especie, y la tomas con una misma unidad, entonces tienes que hallar el cociente [*a*/b] de estas dos medidas, esto significa que has encontrado su ***razón***.

Razón de dos segmentos es el cociente de sus medidas tomadas con una misma unidad.

Si $a = 5m$ y b = 2 m entonces a/b = 5/2 , pero si a = 5m y b = 2cms, entonces, es preciso que las medidas tengan la misma unidad de medida.

$$\frac{a}{b} = \frac{5m}{2m} = 2.5$$

Uno de los conceptos matemáticos usados con más frecuencia en la vida diaria, es el de razón. Por ejemplo: el promedio de bateo de un pelotero, el interés de un préstamo bancario, la relación entre hembras y varones de un aula, etc.

Una ***razón*** es el cociente de dos cantidades, la razón entre la cantidad a y la cantidad b, se escribe de la siguiente manera: a / b o a : b

Si se usa la razón para comparar unidades de medida, las unidades deben ser las mismas..

Ejemplos:

Si un bateador dio 75 hits en 300 turnos al bate, la razón de su promedio es de 75 entre 300.

Una semana tiene 7 días y un mes tiene 30 días, entonces la razón semana a mes, es 7/30 o lo que es lo mismo 7 : 30, que se lee “7 es a 30”.

En una ***razón*** ***a***/b, el numerador es el antecedente y el denominador b, es el consecuente.

La razón b/a, es inversa a la razón a/b.

Una ***proporción*** es un enunciado que afirma que dos razones son iguales.

Dos magnitudes cualesquiera son proporcionales, cuando la razón de dos cantidades de una de ellas es igual a la razón de las cantidades correspondientes de la otra.

Por ejemplo, 2/3 = 12/18 o lo que es lo mismo 2 : 3 : : 12 : 18, que significa que la razón 2/3 es igual a la razón 12/18.

En la proporción a / b = c / d, o a : b = c : d, los términos de la proporción son: a, b, c y d, donde a y d están en los extremos y, b y c están en el medio.

Si se tiene las magnitudes: *a, b, c* y *d* se dice que son proporcionales, entonces: a/b = c/d que también se expresa así: a:b :: c:d y asi: a : b = c : d.

Principio fundamental de las Proporciones:

"En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos"

Esto es, $a/b = c/d$, si y solo si $ad = bc$.

$$\boxed{a/b = c/d = k = ad = bc,}$$

Propiedades de proporcionalidad.

1. En una proporción de cantidades homogéneas, la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes, como cada antecedente es a su consecuente.

Si $a/b = c/d$, entonces:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

2. En toda proporción de cantidades homogéneas, la suma o diferencia de dos términos de la primera razón, es al antecedente o consecuente, como la suma o diferencia de los dos términos de la segunda razón es a su antecedente o consecuente.

Si $a/b = c/d$, entonces:

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

Ejemplos:

1. Si la suma de los segmentos a y b es 24 y su razón es 2/3, determina los segmentos:

Solución:

Como $a/b = 2/3$ y $a + b = 24$, entonces: $\frac{a+b}{a} = \frac{2+3}{2}$ sustituyendo por su igual, se tiene:

$24/a = 6/2$, de donde $a = 24\,(2) \div 6 = 48 \div 6 = 8$, para hallar b, se tiene:

$$b = 24 - a = 18 - 8 = 10$$

2. Determina los segmentos cuya diferencia es 5, y su razón es 4/5.

Solución:

Como $a/b = 4/3$ y $a - b = 5$, entonces: $\frac{a-b}{b} = \frac{4-3}{3}$ de donde

$$5/b = 1/3$$

$$b = 5(3) \div 1 = 15$$

ahora puedes determinar el segmento, como $a - b = 5$ entonces:

$$a = 5 + b = 3 + 15 = 18$$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Escribe cada razón en términos simplificados:

a.- 25 a 40 b.- 16 a 48 c.- 18 Km a 72 Km
d.- 300 personas a 250 personas e.- Pulgada a pie f.- Dolar a peso
g.- Peso a euro h.- Dia a hora. i.- Mes a año
j.- Onza a libra

2. Determina la razón de cada uno de los segmentos siguientes:

a. Si a = 15cms y b = 3cms, entonces a/b = _________
b. Si c = 12.6 dms y d = 3.2cms, entonces c/d =________
c. m/n =_______ y n/m = ________, si m = 5ms y n = 2/3 cms.
d. Si p = 1.7 cms y q = 3.4cms, entonces q/p =__________ y p + q = _______
e. r/s = _______, si r = 6.25 kms y s = 1.25ms.

Cuarta, Tercera y Media Proporcional

Sacas la cuarta figura.
La ***cuarta proporcional*** de los segmentos *a*, **b**, y **c** es un segmento x, que cumple con la condición: $a : \mathbf{b} :: \mathbf{c} : x$.

Como el producto de los medios es igual al producto de los extremos, entonces:

$$x = bc/a$$

Si conoces los segmentos *a* y *b*, y formas la proporción: $a : \mathbf{b} :: \mathbf{b} : x$, entonces *x* es una ***tercera proporcional***, de donde:

$$ax = b^2 \quad \text{luego} \quad x = b^2/a$$

Con las magnitudes *a* y b puedes formar la proporción $a : x :: x : b$, entonces x aparece en el medio de *a* y b, por tanto tienes una ***media proporcional***, de donde,

$$x^2 = ab \quad \text{luego} \quad x = \sqrt{ab}$$

Ejemplos:

1. Calcula la cuarta proporcional de: 6, 5 y 12.

Solución:

Como $a : b = c : x$, de donde $x = bc/a$, sustituyendo a, b y c por su igual, 8, 3 y 12, obtienes:

$$x = 5(12) \div 6 = 60 \div 6 = 10$$

2. Si los segmentos $a = 3$, y $b = 12$, determinas su tercera proporcional.

Solución:

Como $a : b : b : x$, entonces $x = b^2/a$, sustituyendo a y b por su igual obtienes:

$$x = (12)^2 \div 3 = 144 \div 3 = 48$$

3. Calcula m, sabiendo que m es la media proporcional de los segmentos: n = 49cms y p = 25cms.

Solución:

Si $a : x = x : b$, de donde $x = \sqrt{ab}$, entonces:

$$x = m = \sqrt{np} = \sqrt{49 \text{ cms x } 25 \text{ cms}} = \sqrt{1225\text{cms}^2} = 35 \text{ cms}$$

4. Encuentra el valor de A en cada caso:

1.- $3/A= 15/25$ 2.- $8 : 5 = 12 : A$

Soluciones:

1.- Como el producto de los medios es igual al producto de los extremos, se tiene:

$3 \text{ x } 25 = A \text{ x } 15$ de donde $75 = 15A$ por lo que $A = 75/15$

$A = 5$

2.- Del mismo modo $8 \text{ x } A = 5 \text{ x } 12$ por lo que $8A = 60$ por lo tanto

$A = 60/8$

$A = 15/2 = 7.5$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. ***Si un punto p divide el segmento AB de 48 cms., en la razón 2/3, determina AP y BP.***
2. ***Determina los segmentos MP y PN, si MN = 80 cms, y p lo divide en la razón 4 : 5.***
3. ***Si un segmento AB = 14 cms, es 3/2 de CD, determina la razón AB : CD.***
4. ***Completa el cuadro con la cuarta, tercera de a y b, y media proporcional de a y c.:***

a	b	c	Cuarta x	Tercera a y b	Media a y c
4cms	5cms	6cms			
5cms	8cms	1.25 cms			
2.5 m	1.5 m	5 cms			
x + 2	x + 1	x + 3			
25cms	5cms	x - 1			

5. ***El cociente indicado de dos cantidades forma una ____________.***
6. ***La igualdad de dos razones forma una ______________________.***
7. ***En la proporción a : b = c : x, x es una ________________________***
   a. Si *a* : b : : b : x , entonces x es una _________________________.
   b. Pero si *a* : x = x : b, esto indica que x es una ______________________.
8. ***Completa el siguiente cuadro, sabiendo que: a : b : : c : d.***

a	b	c	d	*a*/b	c/d	*a* + b	*a* - b	c + d	c - d
2 cms	3 cms		12cms						
	3.2 cms	1.4 cms	0.2m						
5 dms		6 cms	9 dms						
3 cms	4cms						14cms		
		2.1cms	3.2cms			2.65cms			
				3/8		24dms			
				2/3			4cms		
					4/5	1 km			
				3/4			10.5m		
	1.2m					5m		12m	

9. ***Determina el valor de la variable:***

1. 3 : 4 = x : 8
2. 5 : x = 7 : 56
3. 2/3 : 9 : : 4 : x
4. x : 5 = 4/5 : 2
5. a / 6 = 4 / 18
6. 3x : 8 = x - 4 : 2
7. x : 3 = 4 : x - 1
8. 2 : x = 5 : x + 3
9. k / 4 = 175 / 20
10. d.- x / 80 = 25 / 100
11. 3x : 5 = 9 : x - 2
12. 3 : 5x + 2 = x : 32
13. $3x^2$: 5 : : 105 : 7
14. 49 / 56 = z / 8
15. 4 / 12 = m / 21

10. Si seis galones de gasolina Premium cuestan 720 pesos. ¿Cuánto costará llenar un tanque de quince galones?

11. La distancia entre dos ciudades es 3300 millas. Si en un mapa estas distancias se representan con once pulgadas. ¿Qué tan lejos quedarían en el mapa dos ciudades, cuya distancia real es de 7700 millas?

12. Determina: (x - y)/x, si x/5 = 1/8 ^ y/7 = 3/2x

a. Si la suma de las magnitudes a y b es 18 y su razón es 5/6, determinar: a, b, c y d:

b. Si la diferencia de dos magnitudes es 3, y su razón es igual a 4/3, hallar: a, b, c y d.

II.2.2.1 Operaciones con los números racionales.

Suma y resta de quebrados:

Si deseas sumar ¾ con ¾ obtienes 6/4, si quieres restar 7/8 de 9/8 obtienes 2/8, pero si quiere sumar 3/8 con 4/5, necesitas hallar un común denominador, que se obtiene al multiplicar los denominadores, si :

3/8 + 4/5 = 47/40

El denominador común es 8 x 5 = 40. Entonces divides 40 entre 8 es igual a 5 y se multiplica por el numerador del 8 que es 3: 3 x 5 = 15 y forma el quebrado 15/40, luego haces lo mismo con el otro 15/40 + 32/40 = 47/40 quebrado, 40 entre 5 = 8, y 8 por 4 = 32, y forma el quebrado 32/40; ahora suma los dos numeradores y obtienes: 15 + 32 = 47,. Por tanto: 3/8 + 4/5 = 47/40.

Si ahora deseas restar 2/3 de 7/8, debes hallar el denominador común, que se encuentra multiplicando los denominadores 3 x 8 = 24; entonces 24 entre 8 = 3 y 3 por 7 = 21, del mismo modo, 24 entre 3 es 8 y 8 por 2 = 16, luego 21 menos 16 = 5, por tanto

7/8 – 2/3 = 5/24
21/24 – 16/24 = 5/24

Suma y resta de decimales:

Si deseas sumar 75 centavos con 45 centavos, obtienes: significa que colocaste los números de forma que los puntos quedaran alineados y luego sumaste y bajaste el punto.

0.75 + 0.45 = 1.20
+0.45
1.20

Ahora resta 3.15 de 4.58 y obtienes: se colocan los números de forma que queden punto debajo de punto, luego se restan y se baja el punto en la misma dirección, así:

4.58 – 3.15 = 1.43
- 3.15
1.43

Multiplicación y división de quebrados

Para multiplicar 5 por 3/4 obtienes 15/4, pero si multiplicas 7/8 por 1/2 obtienes 7/16 porque multiplicas numerador por numerador y denominador por denominador, del mismo modo:

5 x 3/4 = 15/4
7/8 x 1/2 = 7/16

3/8 x 5/8 x 1/4 x 1/2 = 15/512

5 ÷ 3/4 = 5 x 4/3 = 20/3

3/4 ÷ 5 =3/4 x1/5 = 3/20

Pero si ahora quieres dividir 5 entre 3/4, lo que tienes que hacer es multiplicar 5 por el inverso de 3/4 que es 4/3 y obtienes: 5 x 4/3 = 20/3, pero si tienes que dividir 3/4 entre 5, multiplicas 3/4 por 1/5 y obtienes 3/20.

Multiplicación y división de decimales.

Si un obrero hace un día por $15.25, ¿Cuánto se gana en 8 días? Se multiplica 5.25 por 8 de forma tal que puedas considerar el punto al final de la multiplicación, así: 8 por 5 = 40; escribo el 0 y llevo 4, 8 por 2 = 16 más 4 = 20; escribo el 0 y llevo dos, 8 por 5 = 40, + 2 son 42; escribo 2 y llevo 4 y 8 x 1 = 8 más 4 = 12. Entonces ahora tengo 12200; como las cifras de la derecha del punto son dos, entonces el producto tiene dos cifras a la derecha del punto, lo que significa que el obrero se gana $122.00 en 8 días.

$$\begin{array}{r} 15.25 \\ \times \quad 8 \\ \hline 122.00 \end{array}$$

Un pintor cobra 8.35 por metro cuadrado de pintura y tiene que pintar una pared que mide 45.78 metros cuadrados, ¿Cuánto se gana al terminar su trabajo?

Multiplicas 43.78 por 8.35 como si estos números no tuvieran puntos, y luego sumas las cifras que están a la derecha del punto y ese mismo número de cifras debe aparecer a la derecha del producto.

43.78 por 8.35

$$\begin{array}{r} 43.78 \\ \times\ 8.35 \\ \hline 21890 \\ 13134 \\ 35024 \\ \hline 365.5630 \end{array}$$

O sea: 5(4378) = 21890, 3(4378) = 13134 y 8(4378) = 35024, y como los factores tienen 4 cifras después del punto, entonces el producto tendrá el punto a 4 cifras de la derecha, es decir:
43.78 x 8.35 = 151.5630, lo que significa que el pintor se ganó $151.56 por pintar la pared.

Del mismo modo, si quieres dividir 0.75 entre 5 divides cero entre 5, que es igual a cero, punto, luego 7 entre 5 es igual a uno, uno por 5 = 5 y se resta de 7 y obtienes 2, bajas el 5 y entonces tienes 25 entre 5 es igual a 5, 5 por 5 igual 25, que lo restas de 25, asi:

```
0.75   / 5
 7      0.15
-5
 25
-25
 00
```

Lo que significa que 75 centavos entre 5 personas toca a 15 centavos para cada una.

```
1585.8615    /3.45

1585.8615 x 100 /3.45 x 100
 158586.15   /345
-1380         459.67
  2058
 -1725
    3336
   -3105
     2311
    -2070
      2415
     -2415
        00
```

De la misma manera, si quieres dividir 1585.8615 entre 3.45 tienes que convertir el divisor en entero, multiplicándolo por 100 y lo mismo tienes que hacer con el dividendo, que es lo mismo que correr el punto del divisor dos lugares hacia la derecha y esos mismos lugares se corren en el dividendo, así:
1585 entre 345 es igual a 4, y 4 por 345 = 1380, que lo resta del dividendo, luego bajas el 8 y divides 2058 entre 345 = 5 y 5 por 345 = 1725, que lo restas del dividendo, quedando 333, ahora bajas el 6 y divides 3336 ÷ 345 = 9, y 9 x 345 = 3105, que lo restas del dividendo, y te quedan 231. ***Antes de bajar el 1***, tienes que colocar el punto en el divisor, es entonces cuando bajas el 1 y divides 2311 ÷ 345 = 6 y 6 x 345 = 2070, que lo restas del dividendo, quedando 241; bajas el 5 y divides 2415 ÷ 345 = 7 y 7 x 345 = 2415, que lo restas del dividendo y queda 0.

Potenciación de quebrados y decimales:

La potencia de un quebrado es la potencia del numerador y la potencia del denominador.

$$(3/5)^3 = 3^3/5^3 = 27/125$$

Elevas el numerador 3 al cubo, que es igual a 3 x 3 x 3 = 27 y el denominador 5 al cubo es 5 x 5 x 5 = 125

Si divides 3 entre 5 el cociente es 0.6, si ahora elevas 0.6 a la tercera potencia obtienes la potencia de un número decimal, que es el producto del decimal tantas veces como indica el exponente.

$$(0.6)^3 = (0.6)(0.6)(0.6) = 0.216$$

Radicación de quebrados y decimales

La raíz de un quebrado es la raíz del numerador y la raíz del denominador.

$$\sqrt{64/100} = \sqrt{64}/\sqrt{100} = 8/10 = 4/5$$

Como la raíz cuadrada de 64 es 8 y la raíz cuadrada de 100 es 10, entonces:

Si divides 64 entre 100 el cociente es 0.64, si ahora extraes la raíz cuadrada de 0.64, obtienes la raíz de un decimal, que es buscar un número que elevado al cuadrado sea 0.64 → $\sqrt{0.64} = 0.8$ porque $(0.8)^2 = 0.64$

$\sqrt{5}$ = no racional

Si quieres hallar la raíz cuadrada de 5, necesitas buscar un número que elevado al cuadrado te de 5, como no existe un número racional que elevado al cuadrado de 5 entonces $\sqrt{5}$ es un número irracional, esta es la característica que tienen lo snúmeros irracionales por eso siempre conservan el signo radical ($\sqrt{}$), estos números son irracionales: $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ = no racional, lo mismo pasa con $\sqrt{7}$= irracional, sus raices son números decimales con cifras decimales que no se repiden, por esto puedes decir:

Los números que se representan por medio de un decimal que no se repite y no termina forman el conjunto de los números irracionales

La unión entre el conjunto de los números racionales y los números irracionales, forman el conjunto de los números reales

$$\left.\begin{array}{r}\text{RACIONALES}\\ \text{IRRACIONALES}\end{array}\right\}\ \text{REALES}$$

Propiedades de la suma y la multiplicación de números reales.

Para los números reales *a*, b y c, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades	**Suma**	**Multiplicación**
Clausura	$(a + b) \in R$	$(ab) \in R$
Conmutativa	$a + b = b + a$	ab = ba
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(ab)c = a(bc)
Identidad o Neutro	Existe el número real 0, tal que $a + 0 = a$	Existe el número real 1, tal que 1a = a
Inversos o Simétricos	Para cada número real a, existe $-a$; tal que $a + (-a) = 0$	Para cada número real $a \neq 0$, existe $1/a$; tal que $a(1/a) = 1$
Distributiva de la multiplicación con respecto a la suma	a(b + c) = ab + ac	

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Completa el cuadrito

$8/9 + \boxed{} - 2 = -1$

$\boxed{} - 1/4 + 3/4 = \boxed{}$

$1/4 \times \boxed{} + 5/8 = 1$

$1/5 \div \boxed{} = 7/5$

$0.75 + \boxed{} = 2$

$\boxed{} = 0.8$

$(-1/2) + \boxed{} - (\quad) = 15$

2. Resuelve:

1. $4 + 23 - 4(3 + 4 \times 5) \div 6 - 8 \times 5 \div 4 =$
2. $19 \times 5 - 3 \times 4 \div 2 + 13 \times 6 \div 3 =$
3. $24 \times 5 \div 6 - 9 \times 4 \div 12 + 28 \times 7 \div 14 =$
4. $36 - 6 \times 8 \div 12 + 42 \times 7 \div 6 - 56 \times 3 \div 8 =$
5. $81 \times 5 \div 9 + 65 \times 8 \div 13 - 9 \times 7 \div 3 - 12 \times 5 \div 4 =$
6. $90 \div \frac{1}{4} + 68 \div \frac{3}{4} - 65 \div \frac{1}{2}$
7. $24 \times 6 \div 8 - 36 \times 8 \div 9 + 12 \times 8 \times 5 \div 20 =$
8. $8 \times 7 \div 4 - 18 \times 5 \div 6 - 84 \times 5 \div 7 =$
9. $5^2 \times 3 - 4^2 \times 5 + 7 \times 3^2 - 4^2 \times 3^2 + 8^0 \times 5 =$
10. $7\sqrt{32} + 3\sqrt{81} - 6\sqrt{144} - 5\sqrt{169} + 8\sqrt{225} =$
11. $4 + 2.\,3 - 4.\,5 + 5 - 3 \times 4 + 8.\,9 =$

12. 2/3 + 4/5 – 1 + 5/8 =

13. 9 – 2/5 =

14. 7/8 – 2/5 =

15. 4/5 + 7/9 - 3/4 + 5/7 =

16. 8/9 – 2/5 – 1/3 + 4/5 =

17. 8(3/4 – 2/5) + 5[7/8 – 3/7] =

18. 2/3 + 4/5 x 3/8 – 1/2 – [– 4/5 – 2/3] =

19. 2/3(5 – 1/5)3/4 – 2/5(3/7 + 2/3)5/4 =

20. (7/9 + 2/5)(2/3 – 5/8)3/4 – 8/9[5/6 – 3/4]9 =

21. 5 2/3 + 8 3/4 – 9 1/5 + 6 2/3 – 7 1/4 + 4 3/5 =

22. 4/5 (7/8 – 6/7) + (4/3 + 8/7) 4/9 =

23. 3/4 [– 4/5] ÷ [– 3/5 + 3/10] =

24. [4 x 5/4 – 1/5] – [4 x 11/10 + $\sqrt{4/25}$] =

25. [2 – {2 – 1/5} – {1 – 7/10}] [2 + 2/3] + [1/4 – 2] [3/2 – 1] =

26. 4 (1/5 + 3/5 x 1/10 + 1/25 – 1/10) =

27. $\dfrac{(2\ \ (1/4 - 1) \div 1/4) + 1/2}{3/5 - 1/2}$

28. $\dfrac{[(3/4 - 1/3)2/3]3 + 2\,[3/4 + 1/2]}{[1 - 1/6]5 - [1/2 - 2/5]2}$

29. $[(1/2 + 5/6 - 1/3)(3/4 - 1/5)]^{2}$

30. $\sqrt{\dfrac{(3/5)^{-1} - 1/6}{3/4 - 1 + 1/8} \times \dfrac{3(10 - 3.5)}{(3/2)^{-2} + 2/3}}$

3. Expresa:

15 como décimas ______	24 como centésimas ______
8 como milésimas ______	0.6 como decenas ______
0.35 como centenas ______	0.225 como millares ______

4. Resuelve:

a. Miguel tiene 1,200 pesos en papeletas de 20 pesos ¿Cuántas papeletas tiene?

b. Si quieresx comprar un televisor que te cuesta RD$32,500.00 y quieres pagarlo en dólares. ¿Cuántos dólares n ecesita si cada dolar te cuesta 37.45 pesos ?

c. Rosa y Luz trabajando 10 horas diarias, si la hora le sale a RD$34.50. ¿Cuánto se ganan cuando trabajan 12 horas?

d. Si una calculadora la compraste en RD$350.00 y al mes la vende perdiendo RD$87.00. En cuanto la vendiste.

e. Un motoconchita recorre 128 kilómetros en 6 horas. En la primera hora recorre 7/8 del total, en la segunda hora 3/4 del total. ¿Cuántos kilómetros recorre en la tercera hora?

f. Grisel compra perfumes a razón de 3/2, si gasta RD$15,250.00 en perfumes y compro 200 perfumes, si lo vende al mismo precio ¿Cuál es su ganancia?

g. Geny quiere comprar zapatillas y dispone de RD$5.650.00, si cada zapatilla cuesta $35.50 ¿Cuántas zapatillas compró y cuánto le quedó?

h. Freddy y Boris están en un sótano de un edificio de 15 pisos y suben 9 pisos ¿En que piso se encuentran ahora?

i. Diofanto nació en el año 275 después de Cristo, si murió a los 84 años. ¿En que año murió?

5. Selecciona la respuesta correcta.

1. El número que nace con la naturaleza es el
   a. natural b. negativo c. entero

2. Las operaciones naturales son:
   a. suma y resta   b. suma y multiplicación   c. suma y división

3. Las operaciones directas son:
   a. suma y multiplicación   b. multilicación y potenciación   c. ambas

4. Las operaciones indirectas o inversas son:
   a. resta, division   b. radicación y logaritmación   c. ambas

5. El número que no altera la suma es el:
   a. cero   b. uno   c. dos

6. El número que no altera el producto es:
   a. cero   b. uno   c. dos

7. El número que al multiplicarlo por otro lo desaparece es el:
   a. cero   b. uno   c. dos

8. El producto de número con el mismo signo tiene signo:
   a. positivo   b. negativo   c. no tiene signo

9. El producto de número con signos opuestos tiene signo:
   a. positivo   b. negativo   c. no tiene signo

10. Los números enteros están formados por:
    a. naturales   b. negativos   c. a л b

11. Los números fraccionarios están formados por:
    a. quebrados   b. decimales   c. mixtos

12. La suma de 54 con la suma de 65 más 78 tiene un total de:
    a. 197   b. 132   c. 119

13. De 123 restar 48, la diferencia es:
    a. 85   b. 75   c. -75

14. La diferencia al restar 69 de 34 es:
    a. 35   b. – 35   c. ninguna

15. La diferencia al restar 124 de la suma de 98 con 25 es:
    a. 1   b. 2   c. -1

16. La diferencia que se obtiene si de la suma de 45 con 87 restas la suma de 93 con 68, es:
   a. 29 b. -29 c. a ∧ b

17. Si restas la suma de 457 con 832 de la suma de 231 con 765, obtienes:
   a. -293 b. 293 c. -239

18. Si multiplicas 245 por 76 y lo restas de la suma de 2,398 con 15,123, obtienes:
   a. 9,901 b. -1,099 c. 1,099

19. Al sumar el cociente de 3675 entre 15 con el producto de 872 por 92, obtienes:
   a. 80,469 b. 46,980 c. -80469

20. Si del producto de 345 por 129 restas la potencia de 14 al cubo, obtienes:
   a. 44,505 b. 41,761 c. 2,744

Unidad III

Sistemas de medida

Introducción

Se ha dicho en el marco teórico, que los objetivos generales de los cursos universitarios de nivelación son *apoyar el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes en torno a la matemática*.

Con el objeto de alcanzar estos objetivos se propone un método de trabajo adecuado a la matemática así como un conjunto de ejercicios, que permiten al estudiante afianzarse en los procesos mentales que en cada unidad, en que se ha dividido este curso de nivelación, presenta.

Objetivos específicos de esta unidad:

En esta tercera unidad del "Curso universitario de nivelación" que lleva el título "Sistemas de medidas" se busca desarrollar uno de las procesos mentales más necesarios para sobrevivir con éxito en este mundo tan tecnológico y cambiante.

Nos estamos refiriendo a la *flexibilidad mental*, es decir:

a la *capacidad mental para*::
- *comprender y profundizar*,
- *alterar las condiciones* de un contenido cualquiera,
- *mirarlo desde diversos puntos de vista*,
- y partiendo *de ellos crear nuevas soluciones que sean más efectivos*.-

En fin, lo que se ha estado llamando en el POMA:
Agilidad mental, Rapidez intuitiva, Creatividad….

Proceso definido operacionalmente por las capacidades de: señalar datos importantes en un problema o situación, visusalizar rápidamente las relaciones entre los datos, detectar la insuficiencia de datos, prever la secuencia de un procedimiento, las consecuencias de una decisión, etc..

Sistematización de ejercicios propuestos para desarrollar este proceso:

Para estimular el desarrollo de esta función mental se proponen ejercicios de tres niveles de cálculo mental:

Estos ejercicios se trabajan solamente con el grupo total de la clase, indicando a los alumnos que realicen mentalmente un conjunto de operaciones matemáticas de forma seguida y apuntando el resultado final en un papel. Estos ejercicios son presentados en forma de dictado.

Nivel 1º: Cálculo mental simple con números enteros

1º se hace esta clase con dictado, con números enteros y operaciones matemáticas sencillas como este:

7 más 5 menos 4, multiplícalo por 2, añádele 20 y réstale 10, es igual a:
$7 + 5 - 4 \times 2 + 20 - 10 =$

2º acabado el mismo se pide a cada alumno que escriba el resultado obtenido
3º se invita a algunos alumnos a que digan el resultado obtenido
4º cuando se haya llegado al resultado verdadero,
5º se invita a los alumnos que han dado resultados falsos, a que reflexionan sobre sí mismos y sus respuestas para que señalen lo qué les ha pasado para equivocarse
6º después de escuchar algunas explicaciones de los alumnos, el profesor intentará resumir las principales causas de fracaso en esta tarea… y motivarlos a controlarlas…

Nivel 2º: cálculo mental complejo con diversas clases de números

1º se hace este a través de dictado, con números enteros, quebrados.y varias operaciones matemáticas más complejas, como esta:

25m, un 1/5, multiplícalo por 6, añade 6, la raíz cuadrada: el resultado es …

2º acabado el mismo se pide a cada alumno escribir el resultado obtenido
3º se invita a algunos alumnos a que digan el resultado obtenido
4º cuando se haya llegado al resultado verdadero
5º invita a los alumnos que han dado resultados falsos, a que reflexionan sobre si mismos y su respuesta para que señalen lo que les ha pasado para equivocarse
6º después de escuchar algunas explicaciones de los alumnos, el profesor intentará resumir las principales causas de fracaso en esta tarea y motivarlos a controlarlas.

Nivel 3: cálculo mental con unidades de medida.

1º se hace este ejercicio dictando los datos, que incluirán ahora unidades de medidas. En este caso el alumno puede hacer estas operaciones por escrito. El dictado sería..

A 70 decámetros, añádele 35 metros y réstale 75 decímetros,

2º escribe el resultado en: a. metros, b. centímetros, c. kilómetros
3º se invita a algunos alumnos a que digan los tres resultados obtenidos
4º cuando se haya llegado al acuerdo del resultado verdadero
5º se invita a los alumnos que hayan obtenido resultados falsos, a que reflexionen sobre sí mismos y sus respuestas para que señalen lo que les ha pasado para equivocarse
6º después de escuchar algunas explicaciones de los alumnos, el profesor resumirá las principales causas de fracaso en esta tarea y los motivará a controlarlas.

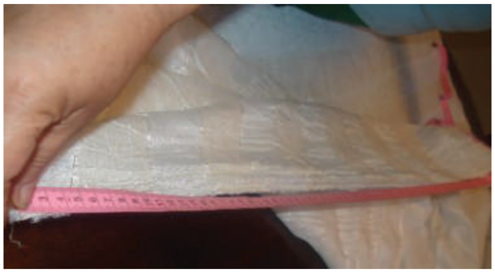
III. 1 Sistemas de Medida

¿Qué es medir?

¿Cuántos centímetros tienes de cintura?

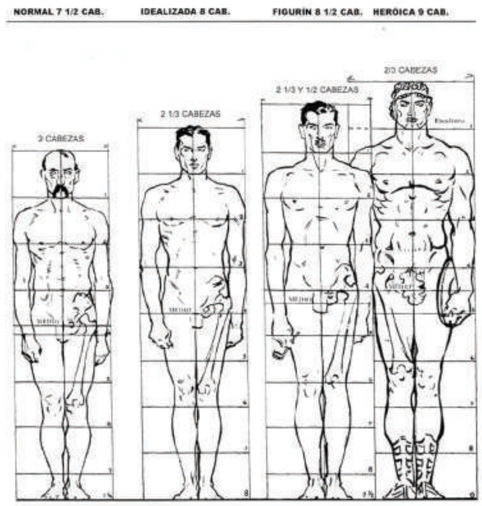
¿Qué ancho tiene el monitor?

¿Qué es unidad de medida?



Si, por ejemplo, vamos a comprar tela a un almacén, podríamos decir al vendedor que nos venda 10 cuartas de género y él comenzará a medir sus cuartas sobre la tela y obviamente no coincidirá con la medida de nuestra cuarta.

Esto hace necesario crear una medida universal que sirva de parámetro común para todas las personas y no tener problemas como el caso del vendedor de telas.

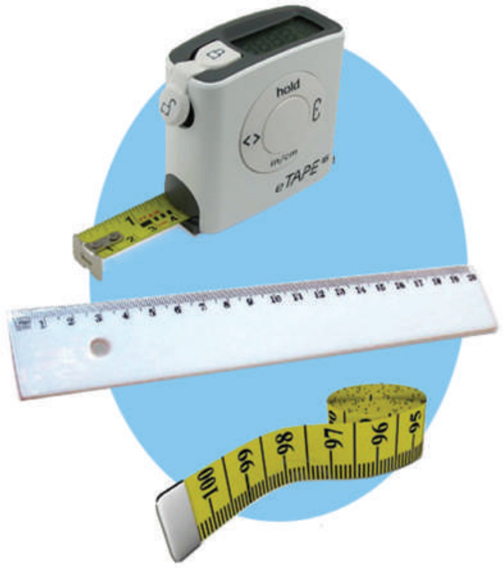


Desde hace miles de años el hombre sintió la necesidad de conocer la magnitud de las cosas y para determinarlas comenzó a desarrollar sistemas de medidas que en un principio fueron ***antropométricos***, es decir, que se basaban en las medidas del cuerpo humano (de ahí denominaciones tales como, pulgadas o pie).por ejemplo, los romanos median las distancias en pasos, codos faraónicos, palmos, dígitos, estadios, pies olímpicos etc...

III.1.1 Medir.

Cuando dices el alto del escritorio es tres veces mi mano, lo que has hecho es considerar la mano como una unidad de medida y por eso puede determinar el alto del escritorio.

Comparar cierta magnitud con otra magnitud que se ha escogido como unidad de medida (patrón de medida), significa medir.



El sistema universal es el ***Sistema Internacional de Unidades***, nombre dado por la II Conferencia General de Pesos y Medidas al antiguo ***Sistema Métrico Decimal*** que usa el metro como unidad base y que fue creado durante la Revolución Francesa y establecido mediante acuerdos internacionales. El objeto de este acuerdo fue fijar relaciones mutuas y lógicas entre todas las mediciones efectuadas por la ciencia, la industria y el comercio. Cerca del 80% de los países del mundo usan el Sistema Internacional de medidas.

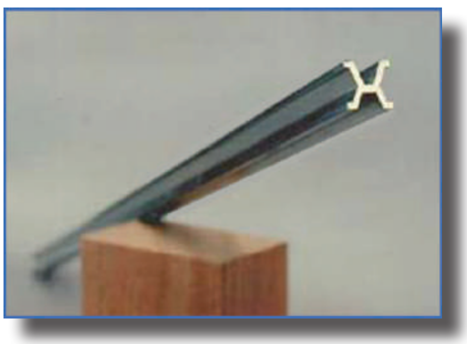
III.1.2 Sistemas de Medida.

III.1.2.1 Sistema MKS (Metro, Kilogramo, Segundo)

Este sistema recibe su nombre porque sus unidades fundamentales son: el metro, el kilogramo y el segundo.

El metro es la unidad de ***longitud***, el kilogramo es la unidad de ***masa*** y el segundo es la unidad de ***tiempo***.

El Metro.



Como medir es comparar una magnitud con otra, se tomó la longitud del meridiano terrestre y se dividió entre 10,000 y esta medida se nombró como ***metro patrón***. Este patrón se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Francia.

El Kilogramo.

En principio se tomó una masa de un decímetro cúbico de agua destilada a 4 º C y se obtuvo el kilogramo patrón, esta unidad de medida también se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

El tiempo.

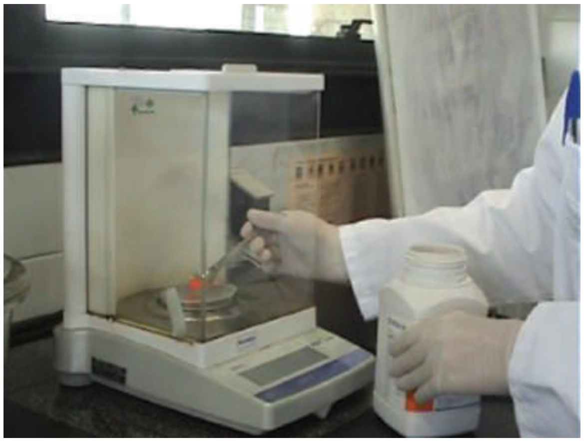
Se consideró la 360 ava parte del giro que da la Tierra alrededor del Sol, y esto se consideró como un día solar, este día solar se dividió entre 24 partes y cada parte forma una hora solar. La hora solar se dividió en 60 partes y cada parte formó un minuto solar. El minuto solar se dividió en 60 partes, formando cada parte un segundo solar. Este segundo es la unidad de medida que se tomó como patrón de medida para el tiempo. De otra forma. un día solar medio lo divido en 86,400 partes, y cada parte es un ***segundo.***

Debes saber que los días tienen diferente duración según las épocas del año y la distancia de la Tierra al Sol. Esto significa que un día solar medio es el promedio de duración de cada número de días del año.

Todos los sistemas de medidas han optado por utilizar el ***segundo*** como la unidad de tiempo.

III.1.2.2 El Sistema C.G.S. (Centímetro, Gramo, Segundo).

Este sistema nace del MKS, porque sus unidades de medidas son derivadas de las unidades de ese sistema, así tomas un metro y lo divides en 100 partes, cada una es un centímetro; el kilogramo lo divides en mil partes y cada parte es un gramo y el segundo es el tiempo que se utiliza en todos los sistemas.



Laboratorista pesando gramos de medicamentos

Estos se utilizan según los casos que se presenten, por ejemplo, un laboratorio de medicamentos trabaja mejor con el sistema cgs, porque el tamaño de los componentes necesarios para obtener las fórmulas de los medicamentos, es conveniente expresarlos en: centímetros y gramos. Mientras que en una construcción se trabaja mejor con metros y kilogramos.

III.1.3 Otros Sistemas de Medida

Existen otros sistemas de medidas que se usan en los territorios de habla inglesa, como Inglaterra y Estados Unidos, que generalmente usan el ***Sistema Inglés***, o ***Sistema Imperial de Unidades.***

III.1.3.1 Unidades de longitud.

El sistema inglés utiliza unidades de longitud, tales como: Pulgada, pie, yarda, milla, legua y Furlong, donde: una ***Pulgada***, que se abrevia ***(in)***, equivale a 2.54 centimetros; un ***Pie*** (ft) equivale a 12 pulgadas, o lo que es lo mismo 30.48 centimetros; una ***Yarda*** (yd) es igual a 3 pies equivalente a 91.44 centimetros; una ***Milla*** (mi) es igual a 1,760 yardas, equivalente a 1,609.34 metros; una ***Legua*** equivale a 6094.38 yardas, que es igual a 5572.7 metros, un Furlong (fur) es igual a 220 Yardas, equivalente a 660 Pies = 201.168 metros.

Los agrimensores usan las medidas de cadena, conocidas como ***cadena de Gunther*** que son: el Link (li) = 7,92 in = 0,001 fur = 201,168 mm y el Chain (ch) = 100 li = 66 ft = 20,117 metros.


Cadena de Gunther

Mientras que para medir profundidades del mar, se utilizan los fathoms (braza), donde una Braza = 6 Pie = 72 pulgada = 1.8288 m; el nudo equivale a una milla náutica por hora, y la milla náutica = 1,852 metros.

III.1.3.2 Unidades de superficie

La unidad de superficie del sistema inglés es la pulgada cuadrada (sq in),cuyo valor equivale a (sq in) = 645.16 mm^2; entonces, un pie cuadrado (sq ft) = 144.03 sq in = 929.03 cm^2. Un acre = 43,561.56 pie cuadrado (sq ft) = 4,046.85 m^2 y por último, la milla cuadrada (sq mi) = 640 acres = 2.59 km^2.

III.1.3.3 Unidades de capacidad y volumen.

Las unidades de capacidad y volumen que usa el sistema inglés son: pulgada cúbica, pie cúbico y yarda cúbico. Además existe un grupo de unidades para medir volúmenes de líquidos y otro para medir materiales secos, asi: una Pulgada cúbica (in^3 o cu in) = 16.387065 cm^3 , un Pie cúbico (ft^3 o cu ft) = 1728 pulgadas cúbicas = 28.317 Litros (l), una Yarda cúbica (yd^3 o cu yd) = 27 pies cúbicos = 7.641 hectolitros (hl). Un pie cúbico = 0.0283 metros cúbicos, 1 metro cúbico = 1.31 yarda cúbica, 1 onza líquida = 28. 413 mililítros, 1 pinta = 0.5683 litros, y 1 galón = 4.5461 litros.

Resumen de unidades y sus equivalencias

Para medir Longitudes o distancias se usa el metro (m) donde: un kilómetro = 1,000 metros, un hectómetro = 100 metros, un decámetro = 10 metros; del mismo modo, un decímetro = 0.1 metro, un centímetro = 0.01 metro, un milímetro = 0.001 metro; mientras que una milla = 1.609 metros, una yarda =0.9144 metros = 91.40 centímetros.
Así un pie = 30.50 centímetros, un pie =0.3048 Metros; una pulgada = 2.54 centímetros = 25.4001 Milímetros; mientras que un nudo equivale a 1.8532 Kilómetros por hora, una Milla= 1.6093 Kilómetros, un Metro = 1.0936 Yardas = 3.2808 Pies, una Hectárea = 2.4710 Acres, un Centímetro = 0.3937 Pulgadas, y un acre = 0.404 Hectáreas
Del mismo modo, para medir Masa la unidad es el kilogramo (kg), donde un kg= 1000 gramos, una Libra = 16 onzas = 0.4536 Kilos, una Onza= 28.3495 Gramos, un kilo = 2.205 libras = 2.6792 Libras troy.

Para medir el Tiempo se utiliza el segundo (seg.), donde una hora (h)son 60 minutos (min.) = 3600 segundos, un minuto (min.) = 60 (seg.) y un día equivale a 24 horas (h).
Para medir líquidos y fluidos se usa el galón, donde un Galón (USA)= 3.7854 Litros, un Galón (G.B.)= 4.5459 Litros; una Pinta(pt) = 550.610 mililitro (mL), un Cuarto (USA)(qt) = 2 pintas = 1.101 L; un Galón (USA)(gal) = 4 cuartos = 4.404 L, una Onza líquida (fl oz) = 0.05 pintas = 28.41 mililitro (mL), uma Pinta(pt) = 568,2 Ml, un Cuarto (G.B.) (qt) = 2 pintas = 1.136 L, mientras que un Galón(G.B.) (gal) = 4 cuartos = 4.546 L.

Tabla de unidades:

Unidad/Sistema	C.G.S	M.K.S	Técnico	otros 1	otros 2
Masa	g	Kg	slug	Lb	
Longitud	cm	M	m	pulg	Pie
Tiempo	s	S	s	S	s
Velocidad	cm/s	m/s	m/s	pulg/s	pie/s
Aceleración	cm/s^2	m/s^2	m/s^2	pulg/s^2	pie/s^2
Fuerza	dina	N	Kgf	Lbf	
Presión	dina/cM^2	Pa = N/m^2	Kgf/m^2	Lbf/pulg^2	atm o lbf/pie^2
Trabajo	ergio	(J) Joule	B.T.U		cal
Potencia	ergio/s	Watt (J/s)	H.P	C.V	cal/s
Momento	dina.cm	N.m	Kgf.m	Lbf.pulg	Lbf

III.1.3.4 Para medir volúmenes

El procedimiento a seguir para medir el volumen de un objeto depende del estado en que se encuentre, que puede ser : ***estado gaseoso, estado sólido o estado líquido.***

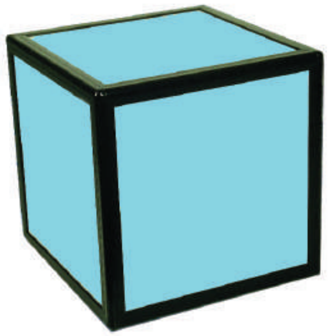
En el caso de nubes gaseosas el volumen varía considerablemente según temperatura.

Para medir el volumen de un líquido se emplean diversos recipientes graduados, dependiendo de la exactitud con la que se desee conocer dicho volumen.

Algunos sólidos tienen formas sencillas y su volumen puede calcularse en base a las geométricas.

Por ejemplo, el volumen de un sólido puede calcularse aplicando conocimiento que proviene de la geometría.

El volumen de un cuerpo es un número positivo que indica la cantidad de espacio que este ocupa. Este número se acompaña por una unidad de medida pertinente que permite dimensionar el volumen medido.

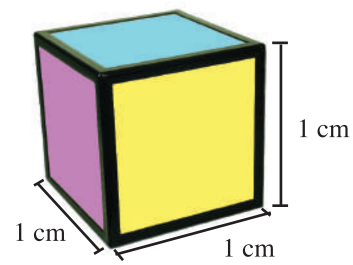


El volumen de un cuerpo regular es un número que se obtiene comparando el volumen del cuerpo con la unidad.

Consideraremos a la unidad como un cubo de arista uno, entonces, la medida del volumen de un cuerpo será igual al número de cubos unitarios que contenga.

Por ejemplo, considerando el cubo unidad que se indica en la figura, el cuerpo adjunto está formado por 25 cubos unidad. Podemos afirmar entonces que el cuerpo del ejemplo tiene 25 unidades de volumen.

Las unidades de volumen son estandarizaciones que permiten dimensionar el número que indica el volumen. Como unidad base se considera a un cubo cuya arista mide un centímetro o un metro, etc. Por definición su volumen tendrá valor uno, acompañado de la unidad de su arista elevada a tres. Por ejemplo, en la figura, si el volumen del cubo mide un centímetro cúbico y se abrevia por 1 cm^3.



Volumen del cubo unidad = 1 cm^3

Estas son las unidades de medida de volumen más utilizadas:

mm^3	Milímetro Cúbico Dm^3	Decímetro Cúbico
cm^3	Centímetro Cúbico	Hm^3 Hectómetro Cúbico
dm^3	Decímetro Cúbico	Km^3 Kilómetro Cúbico
m^3	Metro Cúbico	

III.1.4 Unidades de Temperatura

Las temperaturas se miden en grados y se clasifican en: Celsius, Fahrenheit y Kelvin y otras como la Rankine y la Reamur que son utilizadas en termodinámicas.

Las escalas de temperaturas que se usan en el mundo son: la escala Fahrenheit, usada en EEUU, y la escala Celsius, que forma parte del Sistema Métrico, y es la utilizada en casi todos los demás países.

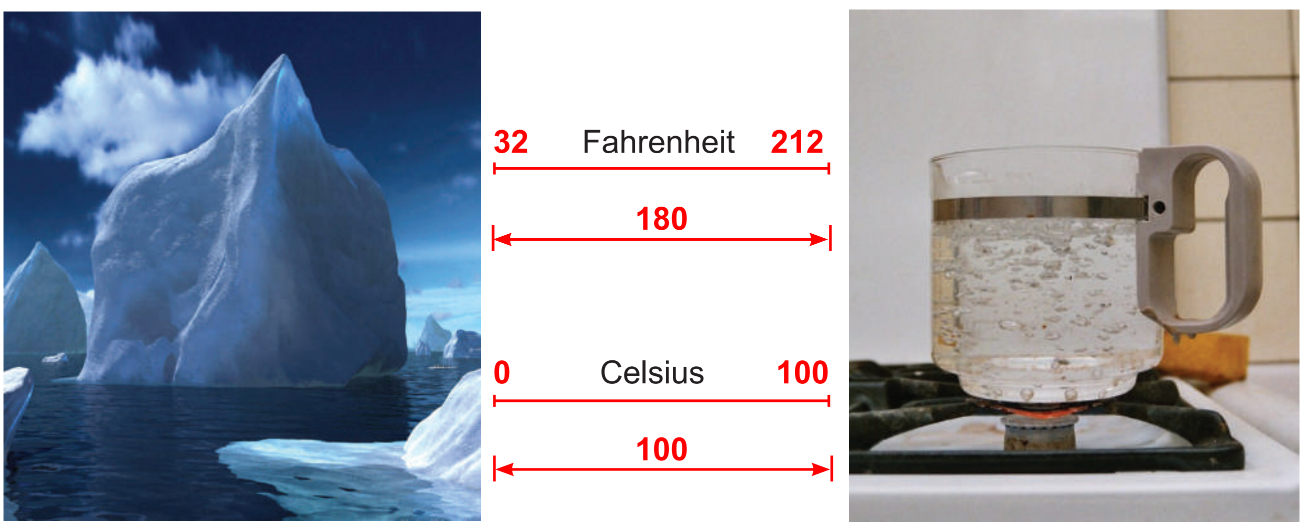
Si tienes que convertir de grado Celsius a grado Fahrenheit solo tienes que multiplica los grados Celsius por 9 dividir el producto entre 5 y al cociente sumarle 32.

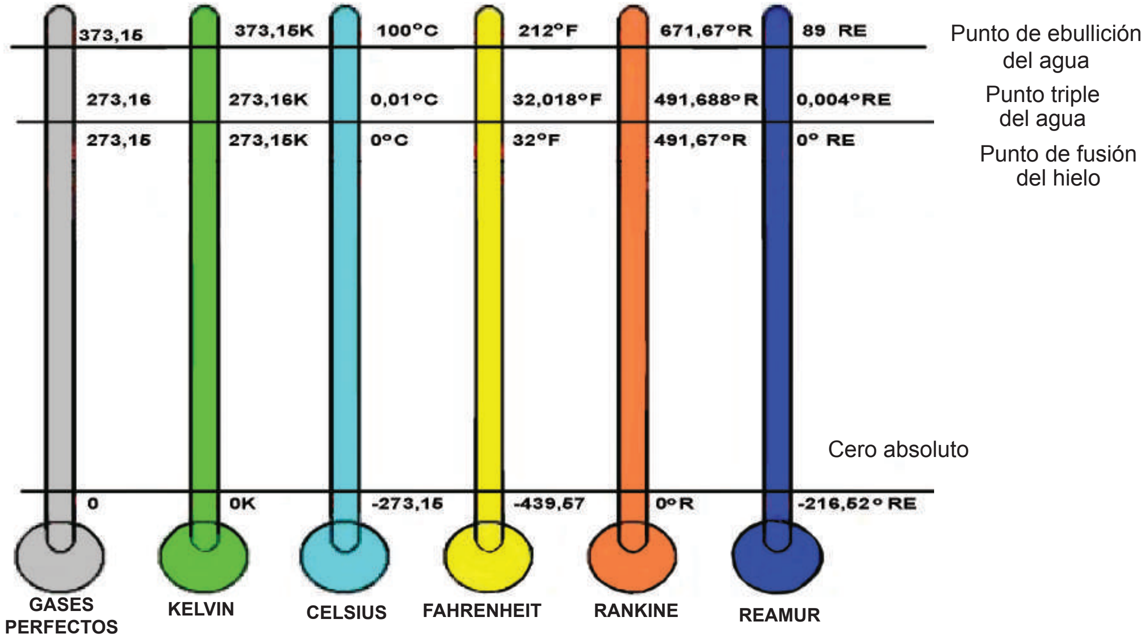
Y recíprocamente para convertir de grados Fahrenheit a grado Celsius, se le restan 32 a los grados Fahrenhit, la diferencia se multiplica por 5 y el producto se divide entre 9.

°C a °F	Multiplica por 9, divide entre 5, después suma 32
°F a °C	Resta 32, después multiplica por 5, después divide entre 9

Como puedes observar solo cambia el número para medir la misma temperatura, así:

Si congelas agua, la escala Celsius marca 0°, pero la Fahrenheit marca 32°, mientras que si hierves agua, la escala Celsius marca 100°, pero la Fahrenheit marca 212°, observa que la diferencia entre congelar y hervir agua es 100° Celsius, pero 180° Fahrenheit, observa el grafico:





Es el momento de practicar lo aprendido

I. Conteste:

1. Se desea saber cuántos metros mide una pista de aterrizaje de 4.5 kilómetros.

2. ¿Cuál es el peso en libras de una caja que pesa 18 kilogramos?

3. Alberto usa 5 litros de agua para llenar un galón. ¿Cuántos galones iguales podrá llenar con 30 litros de agua?

4. Un casillero de refrescos contiene 12 botellas de 3/4 litros. En total hay ___ litros

5. ¿Cuántos gramos hay en un kilogramo?

6. Karina está haciendo mermelada de cereza. Usa 800 g de azúcar por cada Kg. de cereza. Tiene 5 Kg. de cerezas. ¿Cuántos Kg. de azúcar necesita para hacer la mermelada?

7. Encuentra la respuesta en gramos de: 1.2 Kg. +75 g + 12 g =?

8. Laura toma 50 Mg de vitamina C diario. ¿Cuántos gramos de vitamina C toma durante un período de 25 días?

9. Los valores nutritivos de un polvo de bebida de cocoa son puestos en una lista sobre la etiqueta. En 100 g hay: 6 g de proteína, 79 g de carbohidratos, y 10 g de grasa. Enid ha usado dos latas

del polvo en los últimos meses, esto es, 1.5 kg. ¿Cuántos gramos de carbohidratos ha tenido del polvo de cocoa durante ese tiempo?

10. Una caja de vitamina C contiene 120 pastillas. Cada pastilla tiene 200 mg de vitamina C. ¿Cuántos gramos de vitamina C hay en la caja llena?

11. ¿Cuántas pastillas de 200 mg hay en un kilogramo de vitamina C?

12. Calcula la superficie de un rectángulo cuya base es 2/3 de la altura y su altura mide 12 cm.

13. Se han comprado 6 botellas de vinagre de 11/2 litro cada una, en $125.40 ¿Cuánto cuesta el litro de vinagre?

14. Andrea desea enviar dos bolsos que pesan 18,5 Kg. y 12.5 kg. Si se cobra por el transporte $6.80 el Kg. ¿Cuánto debe pagar?

II. Selecciona la respuesta correcta

1. ¿Cuántos litros hay en 5000 ml?

a) 50 l b) 5 l c) 500 l d) 5,05 l

2. ¿Cuántos decilitros hay en 50 litros?

a) 500 dl b) 50 dl c) 5.00 dl d) 5000 dl

3. ¿Cuántos hectolitros son 785 decilitros?

a) 0.0785 hl b) 78.5 hl c) 7.85 hl d) 0.785 hl

4. Marca el símbolo correcto: 5.9 hectolitros __ 589 litros

a) > b) <> c) < d) =

5. Expresa en litros: 3 hl + 6 dal + 7 l + 8 cl =

a) 367,08 l b) 367,8 l c) 3678 l d) 3060,8 l

6. Un camión cisterna lleva gasoil: 10 kl, 8 hl, 7 dal, 9 l, entonces lleva:

a) 100879 l b) 1879 l c) 10879 l d) 108070,9 l

7. Una jarra tiene de capacidad 1 litro 8 decilitros. Los vasos de 200 cl., que se pueden servir son:

a) 9 vasos b) 54 vasos c) 5,4 vasos d) 4,5 vasos

8. Un vaso lleva 150 centilitros. ¿Cuántas botellas de 3/4 litros se pueden llenar con 15 vasos?

a) 5 botellas b) 3 botellas c) 15 botellas d) 30 botellas

9. Anita usa 5 dl de agua para llenar una cafetera. ¿Cuántas cafeteras iguales podrá llenar con 3 litros de agua?

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24

10. Un casillero de cervezas contiene 12 botellas de 3/4 litros. En total hay ________ litros

a) 7.5 litros b) 18 litros c) 6 litros d) 9 litros

III. Selecciona la respuesta correcta:

1. ¿Cuántos gramos hay en un kilogramo?

a) 100 g b) 1000 g c) 10 g d) 10000 g

2. ¿Cuántos hectogramos son 658 gramos?

a) 6.58 hg b) 65.8 hg c) 6580 hg d) 65.8 dag

3. ¿Cuántos decagramos (dag) son 10.7 decigramos (dg)?

a) 0.0107 dag b) 1.07 dag c) 17dag d) 0.107dag

4. Encuentra la respuesta en gramos: 1.2 kg +75 g + 12 dg =?

a) 1276.2g b) 12762g c) 1275.2g d) 1287 g

IV. Coloca en la columna de la derecha el número que corresponda al concepto de la izquierda.

1. Sistemas antropométricos	_____	Se trata de una cantidad especificada con precisión que se toma como medida
2. Magnitud	_____	es comparar la magnitud de una cosa mediante otra magnitud escogida como unidad.
3. Medidas Arbitrarias	_____	son medidas que dependían del arbitrio o de la volun tad de una persona o de un pueblo y por la misma ra zón no eran comprendidos ni aceptados por los demás.
4. Medidas convencionales	_____	es decir, frutos de un convenio o pacto entre personas, entidades o países
5. Los romanos	_____	medían las distancias en pasos, idea que se conserva aún en el juego de niños
6. Medida	_____	es decir, se basaban en las medidas del cuerpo huma no (de ahí denominaciones tales como pulgada o pie).
7. Unidad	_____	se trata de una cantidad especificada con precisión que se toma como medida

V. Coloca en las columnas de la derecha el número que corresponda al concepto de la izquierda:

1. Pulgada	_____ min	_____ Es la magnitud que cuantifica la cantidad de materia de un cuerpo
2. Estadio	_____ s	_____ Es la unidad básica de masa del Sistema Internacional de unidades (SI)
3. Longitud	_____ kg	_____ Es una unidad de longitud antropométrica que equivale a la longitud de un pulgar, y más específicamente a su primera falange.
4. Metro	_____ m	_____ Es equivalente a 25,4 milímetros
5. Masa	_____ ma	_____ Es la magnitud física que mide la duración o separación de acontecimientos sujetos a cambio, de los sistemas sujetos a observación, esto es, el período que transcurre entre el estado del sistema cuando éste aparentaba un estado X y el instante en el que X registra una variación perceptible para un observador (o aparato de medida).
6. Kilogramo	_____ l	
7. Tiempo	_____ Stadium	_____ Es la magnitud que permite ordenar los sucesos en secuencias, estableciendo un pasado, un presente y un futuro, y da lugar al principio de causalidad, uno de los axiomas de método científico.
8. Minuto	_____ Pulge	
9. Hora		_____ es una unidad de tiempo que equivale a la sexagésima parte de una hora. También comprende 60 segundos.
10. Termometro		_____ Es la unidad principal de longitud del Sistema Internacional de Unidades.
		_____ Es la distancia que recorre la luz en el vacío durante un intervalo de 1/299.792.458 de segundo Inicialmente esta unidad de longitud fue creada por la Academia de Ciencias Francesa en 1791 y definida como la diezmillonésima parte de la distancia que separa el polo de la línea del Ecuador terrestre.
		____ se trata de una antigua medida de longitud, equivalente a 600 pies griegos o 625 romanos, probablemente derivada de la dimensión del lugar en el que se realizaban las carreras.
		____ Es la distancia que se encuentra entre 2 puntos que es sinónimo de “distancia”.

UNIDAD IV

EL ÁLGEBRA Y SUS OPERACIONES

Objetivos específicos para esta unidad.

En esta cuarta unidad del "Curso universitario de nivelación" que lleva el titulo "Algebra y sus operaciones" se busca desarrollar un amplio conjunto de procesos mentales, tales como el aprendizaje de una serie de reglas, que permiten ejercer las siguientes funciones mentales: *razonar, discriminar elementos, analizar el procedimiento y los pasos a seguir en cada situación concreta y sobre todo, a automatizar estos procedimientos*.

En síntesis, en esta unidad, primero se define que es el álgebra, para pasar luego pasar a aprender, mediante el método inductivo (de lo concreto o particular a lo abstracto o general) las reglas básicas de algebra para cada una de las operaciones con expresiones algebraicas, ejercitar las mismas en diversas situaciones hasta alcanzar cierta automatización en su ejecución, pero, sobre todo, estimular el sentido de discriminación e identificación de la situación a la cual se refiere el ejercicio. Se podría decir que la mayoría de los ejercicios pueden ser solucionados por un programa de ordenador, al que se le han introducido las reglas básicas y varios criterios de discriminación de las situaciones, dejando a la mente humana, la decisión de apretar una tecla que permita seleccionar, en cada ejercicio. una de las propuestas de solución que el programa ofrecería a la situación concreta a la que se refiere el ejercicio.

De ahí que, en esta unidad, lo importante es entrenar a los alumnos en:

- el aprendizaje aplicado de las reglas básicas,
- la percepción global de los pasos a dar, hasta llegar a alcanzar la estructura de los diversos procedimientos aplicables en cada situación; es decir, apoyar el desarrollo de las funciones mentales: análisis y síntesis de los pasos a dar.
- la capacidad de discriminar rápidamente las condiciones más importantes que permiten diferenciar situaciones.

Ejercicios propuestos para desarrollar la capacidad de discriminación de las situaciones del ejercicio. Así como afianzar los automatismos de los procesos mentales a utilizar.

La Unidad V es muy rica en ejercicios explicados paso a paso y en enunciados de ejercicios a desarrollar. De ahí, que no se proponen nuevos ejercicios, sino que se indican algunos que permiten aprender a descomponer los procedimientos en los diversos pasos a dar.

Metodología a utilizar en los ejercicios propuestos para esta unidad:

1º Poner a trabajar a los alumnos en grupos, siguiendo estos pasos:

a. cada alumno lee el texto completo del ejercicio seleccionado por el profesor,
b. explica verbalmente la categoría del ejercicio, así como las condiciones del mismo
c. enumera los pasos que ha dado el autor del libro
d. discute si todos pasos son necesarios, estudiando la posibilidad de aumentarlos o quitar alguno de ellos.

2º Finalizadas estas actividades

- se invita a los alumnos a que formulen una generalización de este procedimiento y que le den un nombre a este proceso

3º Finalmente el profesor…

- reforzará el esfuerzo realizado por los alumnos, intentará dar el nombre que suele darse a este proceso, si lo conoce,
- Pero, en todo caso, ponderará la importancia que tiene para el enriquecimiento intelectual el desarrollo de este proceso mental.

UNIDAD IV

ÁLGEBRA Y SUS OPERACIONES

IV.1 Introducción al Álgebra.

Una cátedra cuesta el triple de lo que cuesta una mascota más $2.00. Si hace cuatro años con ese precio se compraban dos mascotas y tres cuadernos, ¿Cuánto cuesta una mascota y cuánto cuesta un cuaderno?

Trata de resolver este problema con los conocimientos aritméticos que tienes ¿Podrás hallar una solución satisfactoria? ¿Cuáles elementos te faltan para solucionar el problema? Investiga y determina los precios deseados.

Aquí hay que ampliar la aritmética y es entonces cuando aparece el álgebra.

¿Qué utilidad tiene el álgebra? ¿Por qué no seguir con la aritmética?

Existen problemas [como el anterior) que no se pueden resolver con los principios estudiados en la aritmética, y requieren de otros conocimientos. En situaciones como esta fue que el árabe ***Mohamed ben Musa***, llamado ***Al-guaritzmi***, [de donde proviene la palabra ***álgebra***] usó por primera vez los números y las letras para la solución de problemas que no permitían únicamente el razonamiento numérico.

Mientras la ***aritmética*** utiliza cantidades constantes, o sea, los elementos del conjunto de los números reales, el álgebra utiliza letras del alfabeto para representar esos mismos elementos.

Esta rama de la matemática proporciona los conceptos escalonados, de manera que quien la estudia va adquiriendo un dominio en los símbolos, fórmulas y problemas de manera gradual.

Las expresiones simbólicas que representan números reales al combinarse con las operaciones matemáticas [suma, diferencia, producto y cociente] forman las expresiones algebraicas y es lo que te proporcionará el entendimiento del álgebra.

¿Cómo comprender esta asignatura?

Tu mochila está llena de expresiones algebraicas, 4 mascotas, tres cuadernos, dos lápices, una goma de borrar, juego de cartabones, dos bolígrafos, etc. Si las mascotas las representas por *m*, los cuadernos por *c*, los lápices por *l*, las gomas por *g*, los juegos de cartabones por *j*, los bolígrafos por *b*, entonces tienes: $4m + 3c + 2l + g + j + 2b$; teniendo así una expresión algebraica.

Del mismo modo $-3a^2 + 5ab - 9b^2$ es una expresión algebraica, donde cada uno de sus componentes es un ***término algebraico***. Así puedes decir, debo a la tienda 3 libros, y puedes decir tengo *–3 libros*, que las puedes representar por $-3a^2$.

¿Qué has hecho? Pues, asociar un término práctico [4 camisas] con un ***término algebraico*** [$-3a^2$], del mismo modo asocia $5ab$ con 5 lápices, y $-9b^2$, con la deuda de 9 gomas de borrar.

Las letras que utilizas en las expresiones algebraicas son variables, la expresión $5ab$ tiene dos variables y una constante. El término algebraico $5ab$ está formado por 5 por *a* por *b*, donde 5 es la constante y *ab* son variables o parte literal del término.

Los términos algebraicos siempre estarán separados por los signos + [positivo] ∧ – [negativo], así $7 - 5a + 4b - c$ es una expresión algebraica formada por 4 términos.

¿Cuáles partes tiene un ***término algebraico***?
El término $-5a^3$ tiene el ***signo –*** , el ***coeficiente*** 5 y la ***parte literal*** a, la constante 3 que está encima de la parte literal es su ***exponente***.

Si tienes $xy + xy + xy + xy + xy$, ¿Cuántas *xy* tienes? Obtienes $5xy$.

Ese 5 que obtienes al sumar todas las *xy* es el **coeficiente**.

IV.2 Expresiones algebraicas. Polinomios.

Las expresiones algebraicas las puedes asociar a situaciones de tu medio. Del mismo modo que puedes simplificar: 4 sillas + 3 mecedoras – 5 butacas –8 mecedoras + 7 butacas –2 sillas y obtienes:
4 sillas – 2 sillas + 3 mecedoras – 8 mecedoras – 5 butacas +7 butacas y agrupando los semejantes puedes obtener: 2 sillas – 5 mecedoras + 2 butacas, así puedes reducir:

$$4s + 3m - 5b - 8m + 7b - 2s = 2s - 5m + 2b$$

Las expresiones $4s$, ~ $-2s$ son términos semejantes, al igual que $3m$ ~ $-8m$ y $-5b$ ~ $7b$.

También: $3x^2y^4$, $-9x^2y^4$, $7x^2y^4$ son ***términos semejantes***, mientras que $-3x^4y^2$, $7x^2y^4$ no son términos semejantes.

> ***CONCEPTO:***
>
> ***Los términos semejantes tienen las mismas letras, afectadas de los mismos exponentes.***

Los términos también pueden ser:

Enteros: si no tienen denominador literal, como $-3/4\ m^5n^6$,

Fraccionarios si tienen una variable en el denominador, así: $\dfrac{-7\ m^2n^3}{x^4}$; $\dfrac{4a^3b^4}{-5c}$,

la unión de estos conjuntos de términos forma el conjunto de los términos ***Racionales***,

ENTEROS ∪ FRACCIONARIOS = RACIONALES

mientras que los términos que conservan el signo √ [radical] son los términos ***Irracionales***.

RACIONALES ∪ IRRACIONALES = REALES

Los términos se relacionan entre sí de acuerdo a su grado. Si tienen el mismo grado absoluto, son ***Homogéneos,*** entonces son términos homogéneo, y cuando no tienen el mismo grado absoluto son ***Heterogéneos***, por ejemplo.

> $-3m^4n^7 \wedge 8m^5n^6$
> en caso tienen grados
> $4 + 7 = = 5 + 6 = 11$

** Cuando una expresión algebraica tiene más de un término forma un ***polinomio***.

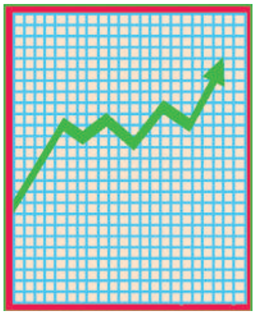
** Un polinomio de dos términos, el polinomio es un ***binomio***. Ej: $5a - 2$

** La expresión algebraica que tiene tres términos forma un trinomio. Ej: $4x^2 - 12xy + 9y^2$

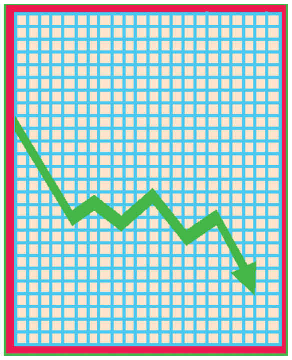
> $8x^4y^5 \wedge 5a^3b^4$
> tienen grados $4 + 5 = 9$ y $3 + 4 = 7$,
> entonces son términos heterogéneos.

IV.2.1 Orden y grado de un polinomio.

Si tienes el polinomio $3 + 5a - 7a^2 + 4a^3 - 2a^4$, podrás observar que está compuesto por una letra o variable, entonces puedes nombrarlo por $p(a) = 3 + 5a - 7a^2 + 4a^3 - 2a^4$ y notarás que tiene cinco términos, que el término de mayor grado es de cuarto grado y que sus exponentes van ascendiendo, luego puedes decir que $p\ (a)$ es un polinomio de cuarto grado y está ordenado en forma creciente.



Entonces puedes decir que el polinomio $q(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 9x - 4$ es de quinto grado y está ordenado en forma descendente por tanto $q(x)$ es un polinomio decreciente de quinto grado.



Puedes tener un polinomio con dos variables $p(x,y)$ que esté ordenado en forma decreciente con relación a una variable y creciente con relación a la otra, así :

$p(x,y) = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$, entonces puedes decir que $p(x,y)$ es de sexto grado porque el término de mayor grado es el sexto y está ordenado en las dos formas: ***decreciente*** con relación a ***x*** , ***creciente*** con relación a ***y***.

El grado de un polinomio lo determina el término de mayor grado, mientras que el grado de un término lo determinas sumando los exponentes de dicho término. Así puedes decir que el término $-8a^4b^5c$ es de décimo grado ya que 4 + 5 + 1 = 10.

IV.2.2 Simplificación de polinomios.

Si tienes 4 guineos, 5 naranjas y dos piñas en una cesta, y en otra tienes 5 piñas, 13 guineos y 9 naranjas, ¿Cuántas frutas tienes de cada una?

Tienes que agrupar las frutas semejantes: 4 guineos con 13 guineos hacen 17 guineos, 5 naranjas con 9 naranjas hacen 14 naranjas y 2 piñas con 5 piñas hacen 7 piñas. De esta misma forma puedes reducir los polinomios a su menor expresión, teniendo en cuenta que las letras representan elementos del conjunto de los números reales.

Si tienes que reducir el polinomio $9x - 5y + 3z + 12y - 4x - 7z$, a su menor expresión, es necesario que agrupes los términos que son semejantes : $9x - 4x - 5y + 12y + 3z - 7z = 5x + 7y - 4z$

Si observas los ejemplos de las operaciones con polinomios, podrás construir sus reglas, empleando tus propias palabras.

Ejemplos:

Reduce estos polinomios a su menor expresión:

1. $9a^2 - 12ab + 8b^2 - 4a^2 + 17ab - 7b^2$

$9a^2 - 4a^2 = 5a^2$
$-12ab + 17ab = 5ab$
$8b^2 - 7b^2 = b^2$

Solución:

Tienes que agrupar los términos que son semejantes, es decir, los que tienen las mismas letras afectadas de los mismos exponentes, *entonces:*

$$9a^2 - 12ab + 8b^2 - 4a^2 + 17ab - 7b^2 = 5a^2 + 5ab + b^2$$

2. $2/3\ m^3n - 3/4\ mn^3 + 2/5\ m^3n + 5/8\ mn^3$

$2/3\ m^3n + 2/5\ m^3n = [2/3 + 2/5]m^3n = 16/15\ m^3n$
$-3/4\ mn^3 + 5/8\ mn^3 = [-3/4 + 5/8]mn^3 = -\ 1/8\ mn^3$

Solución:

Tienes que agrupar los términos que tienen las mismas letras afectadas de los mismos exponentes, *entonces:*

$$2/3\ m^3n - 3/4\ mn^3 + 2/5\ m^3n + 5/8\ mn^3 = 16/15\ m^3n - 1/8\ mn^3$$

3. $8m^4 - 7a^2b^3 - 15m^4 + 5a^2b^3 + 3x^5y^6 - 2a^2b^3 + 9m^4 - x5y^6$

$8m^4 - 15m^4 + 9m^4 = 2m^4$
$7a^2b^3 + 5a^2b^3 - 2a^2b^3 = -4a^2b^3$
$3x^5y^6 - x^5y^6 = 2x^5y^6$

Solución:

Tienes que agrupar los términos que tienen la misma parte literal afectadas de los mismos exponentes, *entonces:*

$$8m^4 - 7a^2b^3 - 15m^4 + 5a^2b^3 + 3x^5y^6 - 2a^2b^3 + 9m^4 - x^5y^6 = 2m^4 - 4a^2b^3 + 2x^5y^6$$

Es el momento de practicar lo aprendido:

1. Escribe tres expresiones de cosas y relaciónalas con expresiones algebraicas

a. ______________________ b. ________________ c. ______________________
a. ______________________ b. ________________ c. ______________________

2. Escribe cinco términos y tres polinomios:

_____________, ______________, _______________, ______________, _______________,
a. ____
b. ____
c. ____

3. Construye tres polinomios crecientes y dos decrecientes. Coloca su grado en el cuadrito.

a. ____ [ ]
b. ____ [ ]
c. ____ [ ]
1. ____ [ ]
2. ____ [ ]

4. Construye tres polinomios binomios y dos polinomios trinomios de segundo grado.

1. ________________ 2. ______________ 3. _______________
1. _____________________________ 2. _________________________

5. Coloca en la raya el coeficiente de cada término:

1. $2x$ ____ 2. $-8.9x^9$ _____ 3. $5/4\ ab^2$ ____ 4. m^2n^3 ____ 5. $8.3\ a^5x$ _____

6. Coloca en el cuadrito el exponente que corresponda a z.

1. $3z$ 2.- $8az^4$ 3. $-7z^8$ 4. $8mz^{2a}$

7. Contesta correctamente:

1. Explica la diferencia entre $7a$ y a^7
2. Escribe cinco términos cuyos coeficientes son los cinco primeros números pares.
3. Escribe cinco términos cuyos exponentes son los elementos del conjunto:
   P = {x/x es un número impar menor que 10}.

4. Escribe un conjunto que tenga tres polinomios de cinco, seis y ocho términos, ordenados cada uno en forma ascendente.
5. Escribe un conjunto que tenga un polinomio de cinco, cuatro y tres términos, ordenados cada uno en forma descendente.
6. Escribe dos conjuntos, de forma tal, que uno tenga un polinomio de cinco términos y el otro de seis términos, cada polinomio debe tener dos letras, una en forma decreciente y la otra en forma creciente.

8. Hallar dos interpretaciones para cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

1. 2x	2. z + 3
2. g/3	4. d + 5
3. 2p + 1	6. 3m – 2
4. (u + 1)/3	8. 2t + 7
5. 9x + 4x	10. 7x
6. x + 15	12. 2b – 3
7. 4(x + 1)	14. x/4 – 2
8. 2(2v + 1)	16. z + (2z + 5)
9. n+ (n+ 1)	18. $y^2 – 4$
10. $s – x^3$	20. x + (100 – X)

9. Traducir las frases del español al lenguaje algebraico.

1. 5 sumado a x
2. 2x aumentado en 4
3. 2 restado de 3x
4. La diferencia entre 2x y 5
5. La suma (x + 6), dividida entre 3
6. M sumado a N
7. N restado de 15
8. 1 menos que Z
9. 3x multiplicado por y
10. Un medio de la suma, (x + y)
11. Para cubrir una pared de un salón se necesitaron 6 secciones de material de recubrimiento, cada uno de x pies de ancho. Que tan larga es la pared?
12. Un árbol tiene una altura que es un medio de la altura de otro. Si H es la altura del árbol más alto, representa la altura del árbol más pequeño.
13. El piso de linóleo de una cocina rectangular está hecho de cuadros, cada uno de X cm de lados. Si el piso tiene 8 cuadros por un lado y 12 por el otro, cuáles son las dimensiones del piso?
14. Un granjero construye su gallinero de un ancho que es un cuarto del largo. Si X es el número de metros del largo, expresa el ancho en términos de X.

15. Juan tiene K libros y María tiene el doble más uno que Juan. ¿Qué expresión algebraica representa el número de libros de María?
16. Manuel tiene X años de edad. Tomás es un año menor. ¿Qué expresión algebraica representa la edad de Tomás?
17. La longitud de una pista de un gran aeropuerto es el duplo de una pista pequeña. Dibuja dos rectas que representen ambas pistas y expresa la longitud de cada una en términos de la misma variable.
18. Un cuaderno costó 28 pesos más que un lápiz, x epresenta el costo de 5 lápices y dos cuadernos.
19. Una firma produjo H unidades de cierto artículo durante su primer año. La producción aumentó en 5000 unidades durante cada uno de los años siguientes. Expresa el número de unidades producidas durante el tercer año.
20. La suma de dos números es 57, y x representa el número menor. Encuentra una expresión algebraica para el número mayor.

10. Reduce estas expresiones algebraicas a su menor expresión.

1. $5x^2y^3 - 4x^2y^3 + 7x^2y^3 - 6x^2y^3 + x^2y^3 - 2x^2y^3 =$
2. $4.5x^2y^8 + 6.8x^2y^8 - 13.7x^2y^8 + 3x^2y^8 =$
3. $7/9\ a^3b^2 - 3/8\ a^2b^3 - 4/9\ a^3b^2 + 1/8\ a^2b^3 =$
4. $-3m^4n - 7m^4n - 4m^4n - 12m^4n - 5m^4n =$
5. $12x^2 - 5xy^3 - 7x^2 + 8xy^3 + 3x^2 - 14xy^3 =$

11. Escribe los polinomios en la variable y grado indicado:

1. p (x) = ________________________________ 5to grado creciente.
2. g (m) = ________________________________ 4to grado decreciente
3. h (y) = ________________________________ 6to grado creciente
4. p (x, y) = ______________________________ 5to grado decreciente y creciente
5. q (m, n) = ______________________________ 7mo grado decreciente y creciente

12. Expresa estos polinomios en forma reducida:

1. p $(x) = 3x^2 - 4x + 1 \quad \wedge \quad$ q $(x) = 3 + 4x - 9x^2 \qquad$ p $(x) \cup$ q $(x) =$
2. p $(m) = 5m^3 + 4m^2 - 3 \quad \wedge \quad$ q $(m) = 4m - 7m^2 - 8m^3 \qquad$ p $(m) \cup$ q $(m) =$
3. h $(y) = -9y + 5y^2 - 7 \quad \wedge \quad$ $g(y) = 6 - 4y^2 + 4y \qquad$ h $(y) \cup$ g(y) =
4. q $(a) = 2/3\ a - 4/5a^2 \quad \wedge \quad$ r $(a) = 3a^2 - 5a \qquad$ q $(a) \cup$ r(a) =
5. p $(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2 \quad \wedge \quad$ q $(x, y) = 3y2 + 4xy - 5x2$ $p(x, y) \cup$ q $(x, y) =$

IV.2.3 Operaciones con los Polinomios.

Adición de Polinomios. Propiedades.

Si sumas el polinomio p(x) de grado n con el polinomio q(x) del mismo grado obtienes otro polinomio p(x) + q(x) = s(x) de grado n, donde los polinomios p(x) y q(x) son los ***sumandos*** y el polinomio s(x) es la ***suma o total***.

p(x) + q(x) = s(x)
sumandos = suma o total

Si los grados de los polinomios p(x) y q(x) son diferentes el polinomio s(x) tiene el grado indicado por el polinomio de mayor grado.

Propiedades de la Adición.

** **Ley de Existencia.** La suma de polinomios es siempre posible.
** **Ley de la Clausura.** La suma de números naturales es un número natural.
** **Conmutativa.** Puedes cambiar el orden de los sumandos y el total es siempre el mismo.
p (x) + q (x) + r (x) = r (x) + p (x) + q (x) = q (x) + r (x) + p (x)
** **Asociativa.** El total no se altera, aunque se establezca la suma entre varios de los sumandos:
p (x) + q (x) + r (x) = p (x) + [q (x) + r (x)] = [p (x) + q (x)] + r (x)
** **Ley Aditiva.** Si a ambos miembros de polinomios iguales, le sumas polinomios iguales, obtienes polinomios iguales.
i p (x) = q (x), entonces p (x) + r (x) = q (x) + r (x)
** **Ley Cancelativa.** Si a ambos miembros de polinomios iguales, le restas polinomios iguales, obtienes polinomios iguales.
Si p (x) + r (x) = q (x) + r (x), entonces p (x) = q (x).

Suma de Polinomios.

Si tienes que sumar el polinomio
p$(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ con
q$(x) = 7x^3 + 4x^2 - 5x + 9$ obtienes p (x) + q (x)

$p(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 7$
$q(x) = 7x^3 + 4x^2 - 5x + 9$
$= \mathbf{11x^3 - x^2 - 3x + 2}$

p (x) + q (x) = $(4x^3 - 5x^2 + 2x - 7) + (7x^3 + 4x^2 - 5x + 9) =$
$= (4x^3 + 7x^3) + (-5x^2 + 4x^2) + (2x - 5x) + (-7 + 9) = \mathbf{11x^3 - x^2 - 3x + 2}$

La adición de polinomios, es el polinomio que tiene los polinomios sumandos, pero con los términos semejantes reducidos, con el grado que tenga el polinomio sumando de mayor grado.

Si deseas sumar el polinomio p$(a, b) = a^2 + 3ab^2 + 5a^3b^2$ con q $(a, b) = 4ab^2 -5a^2 -8a^3b^2$, los reduces a su menor expresión agrupando los términos semejantes, así:

p(a, b) + q$(a, b) = (a^2 + 3ab^2 + 5a^3b^2) + (4ab^2 - 5a^2 - 8a^3b^2)$

reuniendo términos semejantes obtienes:

$= (a^2 - 5a^2) + (3ab^2 + 4ab^2) + (5a^3b^2 - 8a^3b^2) = - 3a^3b^2 - 4a^2 + 7ab^2$ es el total.

Sumar p$(m) = 2 - 4m + 5m^2 - 8m^3$ con q$(m) = -9 + 7m + 3m^3$,

$$
\begin{array}{l}
p(m) = 2 - 4m + 5m^2 - 8m^3 \\
\underline{q(m) = -9 + 7m + 0m^2 + 3m^3} \\
p(m) + q(m) = -7 + 3m + 5m^2 - 5m^3
\end{array}
$$

Puedes usar el método práctico, colocando p (m) primero y debajo colocar q(m) de forma que queden semejantes debajo de semejantes, teniendo en cuenta que en q(m) no hay m^2, y que por tanto su coeficiente es cero.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Reduce cada conjunto a su menor expresión.

a. $\{2a^2 + 3ab - 5b^2, 6b^2 - 15ab + 7a^2\}$
b. $\{6xy - 7x^2 - 3y^2, -24xy - 6y^2, -14x^2 - 4xy + y^2\}$
c. $\{2.3\ m^2 - 3.4\ mn + 5n^2, 6.7mn - 3.5m^2 - 7.2n^2\}$
d. $\{3/4\ x^3 - 8x^2y + 2/5\ xy^2 - 3y^3, 4/5\ x^2y - 3/4\ xy^2 + 5/8\ y^3\}$
e. $\{8 - 3r + 7r^2 - 5r^3, 3r - 9 + 3r^3 - 8r^2, 5 - 6r^2 + 2r^3\}$

2. Establece la adición de estos polinomios.

a. $[5a^3 - 8a^2b] + \{4a^3 - 9ab^2 - b^3\} + (-3a^2b + 6ab^2 - a^3)$
b. $(12x^4 - 8x^3y + 4x^2y^2) + [12x^3y - 9xy^2] + \{7x^4 - 3y^4 - 5x^2y^2\}$
c. $\{5m^2n -12mn^2 + 7n^3\} +(18mn^2 - 24m^2n) + [6m^2n - 7n^3 + 2m^3]$
d. $(5c^3 + 8c^2d - 6d^3) + [7cd^2 - 9c^3 + 2c^2d + 9d^3] + \{4d^3 - 3c^2d + c^3\}$
e. $[6m^5 - 8m^4n + 7mn^3] + \{2mn^3 - 4n^3\} + (3m^4n - 5m^2n^3 + 6n^5)$

3. Si $p(x) = 3 - 7x^2 + 4x^3 - 2x^4$, $q(x) = -5 + 3x - 8x^2 + 2x^4$ ^ $r(x) = 9 - 7x + 4x^2 - 8x^3$ determina el total de:

a. $p(x) + q(x) =$
b. $p(x) + r(x) =$
c. $q(x) + r(x) =$
d. $p(x) + [-q(x)] =$
e. $p(x) + q(x) + [-r(x)]$

4. Si $p(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, $q(x, y) = 3y^2 - 4xy - 5x^2$ ^ $r(x, y) = 9x^2 + 3xy + 3x^2$ determina:

1. $p(x, y) + q(x, y)$
2. $p(x, y) + r(x, y)$
3. $q(x, y) + r(x, y)$
4. $r(x\ y) + [-p(x, y)]$
5. $-q(x, y) + [-r(x, y)]$

Sustracción de Polinomios.

Si tienes que caminar cinco cuadras para ir desde tu casa a la escuela y la librería queda a tres cuadras de la escuela en el mismo sentido, ¿Cuántas cuadras tienes que caminar para ir desde tu casa a la librería?

5 cuadras + 3 cuadras = 8 cuadras
Si estás en la librería y regresas a la escuela
¿A qué distancia de tu casa te encuentras? 8 cuadras - 3 cuadras = 5 cuadras
Como puedes apreciar, la sustracción es una operación inversa a la suma, donde se conoce el total y uno de los sumandos para hallar el otro sumando.

La resta es una operación matemática inversa a la suma, tal que conocido el total (**M**inuendo) y uno de los sumandos (**S**ustraendo), se halla el otro sumando (**D**iferencia).

Si M - S = D entonces D + S = M

La diferencia A - B = A+ (-B), o sea, la resta de dos conjuntos, se convierte en la suma del minuendo con el sustraendo cambiado de signo.

Si te digo, de 20 restar 23 ¿Cómo lo expresas?
¿Cuál es el ***sustraendo***?
¿Cuál es el ***minuendo***?

20 - (+23) = -3

20 - (-23) = 43

Pero si fuera: de 20 restar -23, ¿Cómo lo expresas?
¿Cuál es el ***minuendo*** y cuál es el ***sustraendo***?

** Si tienes que ***restar*** *8* de 15, entonces tendrías: → 15 + (-8) = 7

pero si fuera **de** 8 ***restar 15*** entonces sería: → 8 - 15 = 8 + (-15) = -7.

** Si ahora debes restar $-7a^2b^3$ de $5a^2b^3$, entonces tendrías que sumar al minuendo $5a^2b^3$ el opuesto del sustraendo, lo que significa: → $5a^2b^3 + (+7a^2b^3) = 12a^2b^3$.

** Si de $9x^3y^2$ vas a restar $17x^3y^2$, entonces tienes que sumar al minuendo $9x^3y^2$ el opuesto del sustraendo $12x^3y^2$, lo que te daría: → $9x^3y^2 + (-17x^3y^2) = -8x^3y^2$.

** Si tienes la expresión algebraica $7x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + 9y^3$ para restarla de $8x^3 + 6x^2y - 9xy^2 + 7y^3$ tendrías que saber ¿Cuál es el minuendo y cuál es el sustraendo?, al minuendo es a quien le vas a quitar, y el sustraendo es lo que vas a quitar. →

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 6x^2y - 9xy^2 + 7y^3 \\ -7x^3 + 5x^2y - 4xy^2 - 9y^3 \\ \hline x^3 + 11x^2y - 13xy^2 - 2y^3 \end{array}$$

En sentido general, si tienes una expresión q(x) y la vas a restar de otra p(x), tendrías que sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$p(x)$ restar $q(x) \longrightarrow p(x) + [-q(x)]$ $\wedge$ Restar $q(x)$ de $p(x) \longrightarrow p(x) + [-q(x)]$

** Ahora puedes ***restar*** $7x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - 9y^3$ **de** $8x^3 + 6x^2y - 9xy^2 + 7y^3$, así:

$$[8x^3 + 6x^2y - 9xy^2 + 7y^3] - [7x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - 9y^3] =$$

$$=(8x^3 - 7x^3) + [6x^2y - (-5x^2y)] + [-9xy^2 - 4xy^2] + [7y^3 - (-9y^3)] = x^3 + 11x^2y - 13xy^2 + 16y^3$$

** Si $p(x) = 4 - 7x + 5x^2 - 8x^3$ determinas:
$q(x) = 5x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
$r(x) = 9 - x + 5x^2 - 4x^3$

1. $p(x) - q(x)$
2. $q(x) - p(x)$
3. $p(x) - r(x) + q(x)$
4. $q(x) + r(x) - p(x)$
5. De la suma de $p(x)$ con $r(x)$ restar $q(x)$
6. Restar $p(x)$ de la suma de $q(x)$ con $r(x)$.

Soluciones:

Se suma al minuendo, el opuesto del sustraendo y se obtiene:

1. $p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)] =$

$= [4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] + [-(5x^3 + 7x^2 - 6x + 1)]$

como el opuesto al sustraendo es: $-5x^3 - 7x^2 + 6x -$, ahora agrupas los términos semejantes: y obtienes:

$= [4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] + [-5x^3 - 7x^2 + 6x - 1] =$
$= [4 - 1 - 7x + 6x + 5x^2 - 7x^2 - 8x^3 - 5x^3] =$:
$= 3 - x - 2x^2 - 13x^3$

2. $q(x) - p(x) = q(x) + [-p(x)] = [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1] + [-(4 - 7x + 5x^2 - 8x^3)] =$

Si le cambias los signos al sustraendo, obtienes:
$= [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1] + [-4 + 7x - 5x^2 + 8x^3] =$

entonces agrupas los términos semejantes: =
$[5x^3 + 8x^3 + 7x^2 - 5x^2 - 6x + 7x + 1 - 4] =$

y obtienes: $= \mathbf{13x^3 + 2x^2 + x - 3}$

3. $p(x) - r(x) + q(x) = p(x) + [-r(x)] + q(x) =$

El sustraendo es el que tiene menos (–) delante, entonces cambias los signos a cada término de ese polinomio

$= [4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] + [-(9 - x + 5x^2 - 4x^3)] + [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1]$
$= [4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] + [-9 + x - 5x^2 + 4x^3] + [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1]$

Agrupas los términos semejantes:
$= 5x^3 - 4x^3 + 8x^3 + 7x^2 + 5x^2 - 5x^2 - 6x - x + 7x + 1 + 9 - 4 =$
y obtienes : $= \mathbf{9x^3 + 7x^2 + 6}$

4. $q(x) + r(x) - p(x) = q(x) + r(x) + [-p(x)]$ Esto es suma y resta combinada:
$= [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1] + [9 - x + 5x^2 - 4x^3] + [-(4 - 7x + 5x^2 - 8x^3)] =$

encuentras el opuesto del sustraendo :
$= [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1] + [9 - x + 5x^2 - 4x^3] + [-4 + 7x - 5x^2 + 8x^3] =$

agrupas los términos semejantes:
$= 5x^3 - 4x^3 + 8x^3 + 7x^2 + 5x^2 - 5x^2 - 6x - x + 7x + 1 + 9 - 4 =$
y obtienes: $= \mathbf{9x^3 + 7x^2 + 6}$

5. ***De la suma de p (x) con r(x) resta q(x)***

En este caso tienes que sumar $p(x) + r(x)$ y luego restarle $q(x)$, entonces tienes :

$$p(x) + r(x) - q(x) = p(x) + r(x) + [-q(x)] =$$

$= [4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] + [9 - x + 5x^2 - 4x^3] + [-(5x^3 + 7x^2 - 6x + 1] =$
$= [4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] + [9 - x + 5x^2 - 4x^3] + [-5x^3 - 7x^2 + 6x - 1] =$
$= [4 + 9 - 1 - 7x - x + 6x + 5x^2 + 5x^2 - 7x^2 - 8x^3 - 4x^3 - 5x^3] = \mathbf{12 - 2x + 3x^2 - 17x^3}$

6. ***Resta p (x) de la suma de q(x) con r(x)***

Ahora tienes que sumar $q(x)$ con $r(x)$ y luego restarle $p(x)$, o sea:

$$q(x) + r(x) - p(x) = q(x) + r(x) + [-p(x)]$$

sustituyes por cada polinomio y obtienes:

$$= [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1] + [9 - x + 5x^2 - 4x^3] + [-(4 - 7x + 5x^2 - 8x^3] =$$

encuentras el opuesto del último polinomio y obtienes :

$$= [5x^3 + 7x^2 - 6x + 1 + 9 - x + 5x^2 - 4x^3 - 4 + 7x - 5x^2 + 8x^3] =$$

ahora agrupas los términos semejantes, así:

$$= 5x^3 - 4x^3 + 8x^3 + 7x^2 + 5x^2 - 5x^2 - 6x - x + 7x + 1 + 9 - 4 =$$

y obtienes : $= \mathbf{9x^3 + 7x^2 + 5}$.

** Si $p(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2$
$q(x, y) = 7y^2 + 6xy - 5x^2$
$r(x, y) = 4x^2 - 7xy - 6y^2$

determina:
1. $p(x, y) + q(x, y) - r(x, y)$
2. $q(x, y) - p(x, y) + r(x, y)$

Soluciones:

1. $p(x, y) + q(x, y) - r(x, y)$

Colocas el primer polinomio y debajo colocas el segundo, de forma tal que los términos semejantes queden alineados verticalmente, luego cambias los signos de los términos del tercer polinomio y colocas cada término debajo de su correspondiente, así:

$$\begin{array}{r} p(x, y) = 3x^2 - 4xy + 5y^2 \\ q(x, y) = -5x^2 + 6xy + 7y^2 \\ r(x, y) = -4x^2 + 7xy + 6y^2 \\ \hline p(x, y) + q(x, y) + [-r(x, y)] = -6x^2 + 9xy + 18y^2 \end{array}$$

2. $q(x, y) - p(x, y) + r(x, y)$

$$\begin{array}{l} q(x, y) = -5x^2 + 6xy + 7y^2 \\ p(x, y) = -3x^2 + 4xy - 5y^2 \\ r(x, y) = 4x^2 - 7xy - 6y^2 \\ \hline q(x, y) + [-p(x, y)] + r(x, y) = -4x^2 + 3xy - 4y^2 \end{array}$$

¿Qué has hecho con estos polinomios?
¿Cuál está con signos opuestos?
¿Es cómoda esta forma de expresar los polinomios?
¿Es más fácil esta forma?
Elige la forma que más te convenga.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Crea tres minuendos y tres sustraendos y determina la diferencia.

Minuendo	-	sustraendo	=	diferencia
________________	–	________________	=	________________
________________	–	________________	=	________________
________________	–	________________	=	________________

2. Resuelve:

a. De $-12a^2b^3c$ restar $-3a^2b^3c$
b. De $3 - 4x + 5x^2 + 7x^3$ restar $4x^3 - 5x + 2$
c. Restar $-15x^3y^4z^5$ de $-9x^3y^4z^5$
d. Restar $6a^3 - 4a^2b + 7ab^2 - b^3$ de $5a^2b - 8ab^2 + 4a^3$
e. De $\frac{1}{4} m^3 - 2.3m^2 + \frac{1}{2} m + 4.5$ restar $\frac{1}{4} - 3/5\ m + \frac{1}{2} m^2 - \frac{3}{4} m^3$
f. Restar $9x^2 - 12y^2 + 5xy$ de $x^2 - xy - 5y^2$
g. De la suma de $4m^2 - 5mn - 7n^2$ con $12n^2 - 7mn$ restar $8m^2 - 9mn + 15n^2 - m^2n$
h. Restar la suma de $4a^2 - 6b^2$ con $3b^2 - ab + 3a^2$ de la suma de $12a^2 - 4ab - b^2$ con $4a^2 - 3ab - 8b^2$
i. De la suma de $4x - 8 + 5x^2$ con $9 - 4x - 6x^2$ restar $12x - 7x^2 + 5$ con $12x^2 - 8x - 7$.

3. Completa el siguiente cuadro:

Minuendo	Sustraendo	Diferencia
$5a^2 - 3ab + 2b^2$	$a^2 + 5ab - 7b^2 + 3$	
	$8x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 9y^3$	$2x^3 + 5x^2y - 4xy^2 + y^3$
$7m^3 - 9n^3 + 4m^2n$		$5n^3 - 7mn^2 + 4m^2n - 9m^3$
$2x^3 - 5x^2 + 6x - 2$	$5 - 3x + 7x^2 + 8x^3$	

3. Si $p(x) = 3 - 5x + 7x^2 - 6x^3$; $q(x) = 9x^3 - 5x^2 + 7$; $r(x) = 8x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ y $s(x) = \frac{3}{4}$ x3 - $\frac{1}{4}$ x2 + $\frac{1}{2}$ x+5, determina:

a. $p(x) - q(x) + r(x)$
b. $q(x) + s(x) - p(x)$
f. $[p(x) - s(x)] + [q(x) - r(x)]$
g. De la suma de $p(x)$ con $s(x)$ resta la suma de $q(x)$ con $r(x)$

c. r (x) + s (x) - q(x)
d. s (x) - r (x) - q(x)
e. p (x) - s (x) + r(x) - q(x)

h. Resta la suma de s(x) con q(x) de la suma de r(x) con p(x)
i. Resta p(x) de la suma de r(x) con s(x)
j. De la suma de p(x) con q(x) resta la suma de -r(x) con -s(x).

Multiplicación de Expresiones Algebraicas. Propiedades.

Juan tiene una caja de refrescos como la que se ilustra en la figura, que le costó RD$480.00, si cada refresco lo vende a RD$30.00 ¿Cuánto se gana en la venta?

Para determinar cuánto se gana en la venta de los refrescos de la caja tienes que saber por cuánto los vende todos. Para ello tienes que sumar 30.00 tantas veces como latas de refresco haya. Cada fila tiene 3 latas y son 6 filas, significa que 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18 latas, cada lata la vende a $30.00.

Cada fila cuesta 3 x 30.00 = $90.00, ahora, bien son 6 filas, entonces: 90+90+90+90+90+90 igual a 540.00. Como pagó 480.00. Entonces 540.00 – 480.00 = 60.00. Eso quiere decir que se gano $60.00.

Puedes obtener el valor de la caja de refrescos en una forma más reducida si utilizas la multiplicación, ya que la multiplicación es una suma abreviada, tendrías: 6 veces 3 = 6 x 3 = 18 latas de refresco. Como cada refresco cuesta $30.00 entonces 18 x 30 = 540.00.

Los componentes de la multiplicación son los factores y el producto, los factores son el multicando y el multiplicador.

6 x 3	**= 18**	
factores	=	producto
multiplicando x multiplicador	=	producto

La multiplicación es una operación matemática que tiene por objeto: dado un conjunto llamado multiplicando y otro multiplicador, hallar un conjunto llamado producto que sea respecto del multiplicando, en valor absoluto y signo, lo que el multiplicador es respecto a la unidad positiva.

Propiedades de la Multiplicación.

Si A, B y C son expresiones algebraicas, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

** **Ley Conmutativa.** (p x) * q(x) * r(x) = q(x) * r(x) * p(x) = r(x) * p(x) * q(x)

** **Ley Asociativa.** p(x) * q(x) * r(x) = [p(x) * q(x)] * r(x) = p(x) * [q(x* r(x)]
** **Ley Disociativa.** p(x) * [q(x) * r(x)] = [p(x) * q(x)] * r(x) = p(x) * q(x)* r(x)
** **Ley Distributiva.**

1. [p *(x)* + q*(x)]n* = *n* p *(x)* + *n* q *(x)* (4 + 5)7 = 4x7 + 5x7 = (9)7 = 28 + 35 = 63
2. *m*[r*(x)* – t*(x)*] = *m* r*(x)* - *m* t*(x)* (4 – 5)7 = 4x7 – 5x7 = (-1)7 = 28 – 35 = -7
3. *n*[p*(x)* – q*(x)* + r*(x)*] = *n* p*(x)* – *n* q*(x)* + *n* r*(x)*
   5[8 – 3 + 2] = 5(8) – 5(3) + 5(2) = 5(7) = 40 – 15 + 10 = 35

** **Ley de los Signos.** Si tienes que multiplicar 6 x 3 es lo mismo que sumar 3 seis veces:
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18 ó sumar 6 tres veces : 6 + 6 + 6 = 3(6) = 18 .
pero si tienes que multiplicar -3 por -6 puedes expresarlo así -(3) x (-6) que sería
-[(-6) + (-6) + (-6)] = -[(-18)] Esto significa el opuesto de –18 que es + 18.

¿Qué conclusión obtienes?

Si el multiplicando y el multiplicador tienen el mismo signo, entonces el producto es ***positivo.***
Pero si tienes que multiplicar +3 por -6, entonces tendrías tres veces -6, es decir
(— 6) + (— 6) + (— 6) = —18, o si tienes -3 por 6, entonces serían seis veces (-3), es decir:
(—3) + (—3) +(—3) + (—3) + (—3) +(—3) = —18
¿Cuál conclusión obtienes? Si los factores tienen signos diferentes (+) (-) entonces, el producto es ***negativo***

Coloca en la raya la propiedad que se cumple y coloca en el cuadrito el producto:

1. 3x4x5 = 4x5x3 = 5x3x4 = ____________________________
2. 50x7 = 2x25x7 = 2x5x5x7 = ____________________________
3. 2x4x5x9 = 8x5x9 = 10x4x9 = 8x45 = 18x20 = ____________________________
4. 5(8 + 7) = 5x8 + 5x7 = 5(15) = 40 + 35 = ____________________________
5. [12 – 5]7 = 12x7 – 5x7 = [7]7 = 84 – 35 = ____________________________

Habrás notado que las expresiones algebraicas son como los refrescos del huacal, donde para hallar su valor tienes que multiplicar cada botella por su precio. Ahora tendrás que multiplicar términos que con: signos, coeficientes, variables con sus exponentes; tendrás que recordar el concepto de exponente $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$, en este caso se copió la letra a y se sumaron sus exponentes, del mismo modo, si tienes que multiplicar $3a^2$ por $-4a^3$ tendrías que multiplicar los coeficientes con sus signos (+3) por (-4) = -12 copiar la variable y sumar los exponentes de las bases iguales :$-12a^{2+3} = -12a^5$

En cursos anteriores aprendiste que en el producto de potencias de igual base, se copia la base y se suman los exponentes:

$$a^m \; a^n = a^{m+n}$$

$$a^2\,(a^3).\,a^4 = a^{2+3+4} = a^9$$

** Si tienes que hallar el producto de: $[-4x^3y^5](7xy^3z)\{-3x^5z^4\}$, debes multiplicar los coeficientes con sus signos:$[-4](+7)\{-3\} = +84$, luego copias todas las variables y sumar los exponentes de las variables comunes:

$$[-4x^3y^5](7xy^3z)\{-3x^5z^4\} = +\,84x^{3+1+5}y^{5+3}z^{1+4} = 84x^9y^8z^5$$

** Si deseas hallar el producto de: $[3a]$ por $(5a^2 - 7ab + 4b^2)$, multiplicas el primer factor por cada uno de los términos del segundo factor:

$$[3a](5a^2 - 7ab + 4b^2) = 3a(5a^2) + 3a(-7ab) + 3a(4b^2) = 13a^3 - 21a^2b + 12ab^2$$

** Si tienes que hallar el producto de $(4x^2 + 8x - 12)$ por $[¾x^2]$, debes multiplicar cada término del multiplicando por el multiplicador, así :

$$(4x^2 + 8x - 12)\,[¾\,x^2] = 4x^2\,[¾\,x^2] + 8x\,[¾\,x^2] + (-12)[¾\,x^2] =$$

al multiplicar los coeficientes tienes que recordar

$$= 12/4\,x^4 + 24/4\,x^3 - 36/4\,x^2 = 3x^4 + 6x^3 - 9x^2$$

que para multiplicar un entero por un quebrado se multiplica éste por el numerador y se divide entre el denominador.

** Si ahora tienes que multiplicar $(3a - 4b)$ por $[2a^2 - 5ab + 6b^2]$, debes multiplicar cada término del primer factor por cada uno de los términos del segundo factor, así:

$$(3a - 4b)[\,2a^2 - 5ab + 6b^2] = 3a[2a^2 - 5ab + 6b^2] + (-4b)[2a^2 - 5ab + 6b^2] =$$

$$= 6a^3 - 15a^2b + 18ab^2 - 8a^2b + 20ab^2 - 24b^3$$

ahora agrupas los términos semejantes $-15a^2b - 8a^2b = -23a^2b \wedge +18ab^2 + 20ab^2 = 38ab^2$ y obtienes:

$$= 6a^3 - 23a^2b + 38ab^2 - 24b^3$$

** Si tienes que multiplicar $[5x^2 - 4xy + 7y^2]$ por $(3x + 2y)$, ¿Cómo hallarías el producto?

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4xy + 7y^2 \\ 3x + 2y \end{array}$$

colocas el multiplicando y debajo el multiplicador, así :
Multiplicas el primer término del multiplicador por cada término del multiplicando.

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4xy + 7y^2 \\ 3x \;+ \\ \hline 15x^3 - 12x^2y + 21xy^2 \end{array}$$

x	5	-4	7
3	15	-12	21
2	10	-8	14

ahora multiplicas el segundo término del multiplicador por cada término del multiplicando.

Tienes luego que reducir los términos semejantes de estos dos productos para obtener:

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4xy + 7y^2 \\ + 3x \;+ 2y \\ \hline 15x^3 - 12x^2y + 21xy^2 \\ + 10x^2y - \;\; 8xy^2 + 14y^3 \\ \hline 15x^3 - \;\; 2x^2y + 13xy^2 + 14y^3 \end{array}$$

x	5	-4	7
3			
2			

También puedes hallar este producto por coeficientes separados, formando una *tabla de doble entrada*, como la que aparece a la izquierda: los coeficientes ***5 -4 7*** del multiplicando forman la primera fila y los coeficientes ***3 2*** del multiplicar están en la primera columna. Ahora multiplicas cada elemento de la fila por cada elemento de la columna y el producto se coloca en la intersección de la fila con la columna, así:

En la intersección de la primera fila con la primera columna está el ***15*** que es el coeficiente del primer término del producto. El coeficiente del último término ***14*** aparece en la segunda fila y tercera columna.

x	5	-4	7
3	15	-12	21
2	10	-8	14

x	5	-4	7
3	15	-12	21
2	10	-8	14

El coeficiente del segundo término del producto es la suma de la intersección de la primera fila con la segunda columna 10 + (12) = -2 más la intersección de la segunda fila con la primera columna según muestra la diagonal.

El coeficiente del tercer término del producto está formado por la suma de la intersección de la primera fila con la tercera columna (21), más la intersección de la segunda fila con la segunda columna (-8), o sea 21 + (-8) = 13.

Ahora tienes que determinar el grado del producto, sumando los grados del multiplicando más el del multiplicador : 2 + 1 = 3. Los términos en los factores deben estar ordenados con relación a las variables y en ese mismo orden deben aparecer en el producto.

$$(5x^2 - 4xy + 7y^2)[3x + 2y] = \boxed{15x^3 - 2x^2y + 13xy^2 + 14y^3}$$

** Compara la forma de coeficiente separados con la formas anteriores al hallar el producto de $(3x^2 + 4)[4x^4 - 3x^2 + 7]$. Recuerda que debes tener los factores ordenados con todos sus términos, o sea: $(3x^2 + 0x + 4)[4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 7]$

x	3	0	4
4	12	0	16
0	0	0	0
-3	-9	0	-12
0	0	0	0
7	21	0	28

La tabla es:
¿Cuál es el grado del producto?
¿Cuántos términos tiene el producto?
¿Cuántos términos nulos tiene el producto?
¿Cuál es el producto?

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Determina el producto de:

1. $[-4x^2](3x^3y)\{-\frac{1}{2}xy^2z\} =$
2. $[5c^3d^4x^5](-3c^8x^9y^2]\{-4c^5d^7y^{13}\} =$
3. $(-3.8a^7b^4c^5)[5.006a^9b^7c]\{-9.2a^3b^2d^4\} =$
4. $7a^3b^2[3a^2 - 2ab + 5b^2] =$
5. $(5m^2 - 8n^2 + 3mn)[3m - 5n] =$
6. $[-3 + 4x - x^2](3x^3 - 4x^2 + 1) =$
7. $[5a + 3a^2](3/5 - 2a^3) =$
9. $(-8m^9n^7)[6a^2m^4n^5]\{-5a^3m^7n^3\} =$
10. $(3/5a^3m^5n^4x^6)[5/8b^3m^7x^2y^2] =$
11. $[-5m^2](4m^3 + 5m^2 - 8m + 7) =$
12. $[3x^2 - 5x + 6](4x - 7) =$
13. $(3x^2 - 2y^2)[2x^3 - 7x^2y + 3xy^2 - 5y^3] =$
14. $(2 + 5m)[\frac{1}{2} - 3m^2] =$
15. $(2/3 - \frac{1}{4}x)[4/5 - \frac{3}{4}x + 3x^2] =$

2. Si $p(x) = 4x - 1$, $q(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $r(x) = 6 - 2x$ ^ $s(x) = 2 - 5x + 8x^2 - 4x^3$, coloca en la raya el producto que se te pide :

1. $p(x)\,q(x) =$ ______________________
2. $p(x)\,s(x) =$ ______________________
3. $q(x)\,s(x) =$ ______________________
4. $p(x)\,r(x) =$ ______________________
5. $q(x)\,r(x) =$ ______________________
6. $r(x)\,s(x) =$ ______________________

Prueba que: ***1. $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$***

NOTA HISTÓRICA:

Paolo Ruffini

Nació el 23 de septiembre de 1765, en Valentano, Italia. Se graduó primero de médico y luego se dedicó al estudio de la matemática, logrando hacer varias investigaciones en el conjunto de las ecuaciones. Por sus publicaciones fue nombrado profesor de Análisis y de Matemática de la Universidad de Módena, la cual fue suspendida durante la ocupación francesa a Italia, y luego se restableció al entrar los austríacos a Módena en 1799. Sus obras son: ***"La Teoría General de Ecuaciones" y Reflexiones sobre la Solución de Ecuaciones Generales".*** Es autor además de la Regla que lleva su nombre al tratar los cocientes de polinomios. En 1806, fue profesor de Matemática de la Escuela Militar de Módena. Cuando el duque de esta ciudad recobró sus Estados, lo nombró rector de la Universidad. Fue presidente del Instituto de Ciencias de su país y se puede decir que fue el iniciador de la Teoría de Grupos. Ruffini murió a los 57 años, el 10 de mayo de 1822.

División de Expresiones Algebraicas. Propiedades.

Si 5 mascotas te cuestan RD$60.00
¿Cuál es el precio de una mascota?

5 mascotas = 60.00

1 mascota = 60.00 ÷ 5 = 12.00

Para obtener el precio de una mascota tuviste que realizar la operación inversa a la multiplicación, que es la división, donde se conoce el producto de dos factores [dividendo] y uno de los factores [divisor], y es necesario encontrar el otro factor [cociente].

dividendo		
60	/ 5 divisor	
0	12	cociente
residuo		

Si tienes 5 x 12 = 60, eso significa que 60 ÷ 5 = 12 $\wedge$ 60 ÷ 12 = 5
¿Qué pasaría si multiplicas 60 por el inverso de 5?
Como el inverso de 5 es 1/5, entonces: 60 x 1/5 = 60/5 = 12
del mismo modo 60 x 1/12 = 60/12 = 5

Si D(x) es el dividendo, d(x) es el divisor,
C(x) es el cociente y r(x) es el residuo, entonces

$$D(x) \div d(x) = C(x) \text{ , si } C(x)d(x) + r(x) = D(x)$$

El grado del polinomio D(x) tiene que ser mayor o igual que el grado del polinomio d(x).

Si el residuo es cero: ¿Cómo es la división?

¿Cómo es la división cuando tiene un residuo diferente de cero?

Propiedades de la División.

La división goza de la propiedad distributiva respecto a la suma algebraica.
Para expresiones algebraicas: A(x), B(x), C(x) y D(x), se cumple que:

$$[\,A(x) + B(x) - C(x)\,] \div D(x) = [A(x) \div D(x)] + [B(x) \div D(x)] - [C(x) \div D(x)]$$

Como la división es un caso especial de multiplicación, puedes comprender que: el cociente de expresiones algebraicas con iguales signos es ***positivo*** y el cociente de expresiones algebraicas con diferentes signos es ***negativo***.

(+A) ÷ (+B) = +C	[+30] ÷ (+5) = + 6	(–A) ÷ (+B) = – C	[+30] ÷ (– 5) = – 6
(–A) ÷ (– B) = +C	[–30] ÷ (–5) = + 6	(+A) ÷ (– B) = – C	[–30] ÷ (+5) = – 6

Casos Particulares de la División.

1. El cociente que se obtiene al dividir una expresión matemática A(x) entre cero no está determinado en el conjunto de los números reales :

$A(x) \div 0 =$ no puede ser, si $A(x) \neq 0$ $\longrightarrow$ $A(x) \div 0 =$ indeterminación.

2. Si el dividendo es cero y el divisor también es ***cero*** entonces puedes obtener infinitos cocientes, ya que todos los números multiplicados por cero dan cero.

$0 \div 0 = n$ porque $n(0) = 0$, si $n \in \Re \wedge n \neq 0 \longrightarrow 0 \div 0 =$ infinitos números

3. Si el dividendo es ***cero*** y el cociente es un elemento del conjunto de los: números reales: $\mathbf{R} = \{x/x$ *es un número real*$\}$, entonces el cociente es cero.

$0 \div n = 0$ porque $0(n) = 0$, si $n \in \Re \wedge n \neq 0 \longrightarrow 0 \div n = 0$

♣ Si el dividendo es el polinomio $p(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ y el divisor es el polinomio $q(x) = 2x + 1$ ¿Cómo encuentras el cociente y el residuo ?

¿Cómo divides 49587 entre 12? Pues, divides 49 entre 12, es igual a 4, este 4 lo multiplicas por el divisor (12) y lo restas del dividendo; bajas el término que sigue y repites el proceso hasta que aparece un residuo, observa:

$$\begin{array}{l|l} 49587 & 12 \\ \hline -48 & 4132 \\ 15 & \\ -12 & \\ 38 & \\ -36 & \\ 27 & \\ -24 & \\ 3 & \end{array}$$

El cociente es 4132 y el residuo es 3, lo que significa que $[4132](12) + 3 = 49587$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 12x^2 + 6x + 1 & 2x + 1 \\ \hline -8x^3 - 4x^2 & 4x^2 + 4x + 1 \\ \quad + 8x^2 + 6x & \\ \quad - 8x^2 - 4x & \\ \qquad + 2x + 1 & \\ \qquad - 2x - 1 & \\ \qquad\ \ 0 \quad 0 & \end{array}$$

Lo mismo tienes que hacer al dividir el polinomio *(px)* entre el $q(x)$, si $p(x) = x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ y $q(x) = 2x + 1$

Divides el primer término del dividendo entre el primer término del divisor : $[8x^3] \div (2x) = 4x^2$, multiplicas ahora este término del cociente por todo el divisor y lorestas del dividendo, te sobran $8x^2$; bajas el término que sigue y repites todo el proceso hasta encontrar un término menor en el residuo que el divisor.

El cociente es $4x^2 + 4^x + 1$ y el residuo es cero, eso significa que:

$$[4x^2 + 4x + 1](2x + 1) + 0 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

♣ Observa el proceso de división de:
$p(a, b) = 12a^3 - 41a^2b + 44ab^2 - 17b^2$ entre $q(a, b) = 4a - 3b$.

Divides $12a^3$ entre $4a$ y obtienes $3a^2$, es el primer término del cociente, que lo multiplicas por el divisor y el producto lo restas del dividendo : $3a^2(4a - 3b) = 12a^3 - 9a^2b$, {recuerda que este producto es sustraendo}, la diferencia es $-32a^2b$; bajas el término que sigue y se forma el binomio: $-32a^2b + 44ab^2$, ahora repite el proceso, es decir : divides $[-32a^2b]$ entre $(4a)$ y obtienes:

$$
\begin{array}{llll}
12a^3 - 41a^2b + 44ab^2 - 17b^3 & / \underline{\ 4a - 3b\ } \\
\underline{-12a^3 + 9a^2b} & \quad 3a^2 - 8ab + 5b^2 \\
\quad - 32a^2b + 44ab^2 & \\
\quad \underline{+32a^2b - 24ab^2} & \\
\qquad +20ab^2 - 17b^3 & \\
\qquad \underline{- 20ab^2 + 15b^3} & \\
\qquad\qquad - 2b^3 &
\end{array}
$$

$-8ab$, este es el segundo término del cociente, que multiplicas por todo el divisor y el producto lo resta del dividendo: quedando $+20ab^2$, bajas el término que sigue : $-15b^3$, y entonces divides $[+20ab^2]$ entre $(4a)$ y obtienes $5b^2$; que es el tercer término del cociente, que lo multiplicas por el divisor y lo resta en el dividendo, quedando un residuo de $-2b^3$.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Después de formar dos polinomios p(x) y q(x) multiplícalos y su producto divídelo entre p(x) y comprueba que el cociente es q(x).

$p(x) =$ ____________________

$q(x) =$ ____________________

a. $p(x)\ q(x) =$ ____

b. $[p(x)\ q(x)] \div p(x) =$ ____________________________________

c. $[p(x)\ q(x)] \div q(x) =$ ____________________________________

2. Si un factor es $-2x^3y^2$ y el producto es $4x^8y^6$, el otro factor es ____________________

$(-2x^3y^2)[\qquad\qquad] = 4x^8y^6$

3. Si el dividendo es $20m^5n^4p^9$ y el divisor es $4m^2n^3p^5$, entonces el cociente es ________________

$\dfrac{20m^5n^4p^9}{4m^2n^3p^5}.$

4. Si el producto de dos factores es $16.28a^{14}b^5$ y un factor es $4a^8b^2$, el otro factor es _________

$[\qquad\qquad](4a^8b^2) = 16.28a^{14}b^5$

5. Siendo el** dividendo **$12m^3n^4 - 4m^2n^3 + 2m^3n^2$ y el divisor es $-2m^2n^2$, entonces el** cociente **es :

$\dfrac{12m^3n^4 - 4m^2n^3 + 2m^3n^2}{-2m^2n^2}$

6. Si el divisor es 2a y el cociente es $3a^3 - 2a^2 + 4a$, el dividendo es _____________

$\qquad\qquad / \underline{\ 2a\ }$

$\qquad\qquad 3a^3 - 2a^2 + 4^a$

7. El dividendo es $12a^2b - 3a^3b^2 + 15a^4b^3$ y el cociente es $5a^3b^2 - a^2b + 4a$, halla el divisor.

$12a^2b - 3a^3b^2 + 15a^4b^3 \quad / \underline{\qquad\qquad}$

$\qquad\qquad 5a^3b^2 - a^2b + 4^a$

8. Determina el cociente y el residuo si el dividendo es $15m^2 + 24mn - 21n^2$ y el divisor es $5m + 3n$.

$15m^2 + 24mn - 21n^2 \quad / \underline{\ 5m + 3n.\ }$

10. El divisor es $4x + 5y$, el dividendo es $12x^3 + 35x^2y + 13xy^2 + 10y^3$, ∴ el cociente es :

$12x^3 + 35x^2y + 13xy^2 + 10y^3 \;\big/\; 4x + 5y,$

Analiza:

1. Si $p(a) = a^6 - 2a^5 - 7a^2 + 6a^3 - 4a + 6$ y $q(a) = a^4 - 3a^2 + 2$, halla $p(a) \div q(a)$. =

2. Si el dividendo es $p(x) = 3x^6 + 5x^5 - 9x^4 - 10x^3 + 8x^2 + 3x - 4$ y el cociente es $q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$, determina el divisor.

   $p(x) \div \quad = q(x)$

3. El divisor es d(r) = r - 2, el cociente es $c(r) = 4r^2 + 5r + 1$, el dividendo es:

   $\big/\; r - 2$

   $4r^2 + 5r + 1$

4. Si el dividendo es $D(a) = a^4 - 64$ y el divisor es $d(a) = a - 4$, ¿Cuál es el cociente?

   $$\frac{a^4 - 64}{a - 4}$$

5. El divisor es $4x^2 + 5x - 6$ y el cociente es $5 + 3x + 6x^2 + x^3$, halla el dividendo.

   $\big/\; 4x^2 + 5x - 6$

   $x^3 + 6x^2 + 3x + 5$

6. El dividendo es $6m^2 - 25m + 14$ y el cociente es $3m - 2$, entonces el divisor es :

   $6m^2 - 25m + 14 \;\big/\; 3m - 2$

Debes recordar que:

Los signos que utilizas en matemática son:

Signos de Operación, cuando realizas operaciones $\{+, -, x, \div, \sqrt{\ }\}$,

Signos de Relación, cuando relacionas una cantidad con otra. $\{=\ \neq, \equiv, \cong, >, <, \geq, \leq, \backsim, \ngtr, \nless, ...\}$

Signos de Agrupación cuando conviertes un grupo de expresiones en una sola. $\{(\ ), [\ ], \{\ \}, \text{——}\}$.

Puedes suprimir signos de agrupación si tienes en cuenta el signo que le antecede, sea + o — . ya que el signo — afecta todos los términos que se encuentran dentro del signo de agrupación y el signo + no lo afecta.

Si tienes +2[2a - 3b] - (-4a + 5b) + 3{-a + 2b},puedes eliminar el corchete multiplicando para eliminar el paréntesis multiplicas para eliminar las llaves multiplicas ahora reduces todos los términos

$+2(2a) = 4a$ ^ $+2(-3b) = -6b$,
$-1(-4a) = +4a$ ^ $-1(5b) = -5b$,
$+3(-a) = -3a$ ^ $+3(2b) = +6b$,
$4a - 6b + 4a - 5b - 3a + 6b = 5a - 5b$

Elimina los signos de agrupación y simplifica:

1. $[4 - (9 + \{7 - 3a - (4a - 8) - 12 + 5a\} - 9a]$
2. $\{8y - 5x + (6 - 4x + 7y - [5y + 8x - \{2x + 4y\} - 7] + 12\}$
3. $-2\,(6m^2 - 3m^2n + [7m^2 - 1 - \{3m^2 + 7m^2n - 9\} + 4m^2n] - 5)$

NOTA HISTORICA

Diofanto

Genio griego que vivió en el año 275 después de Cristo. Dejó varios libros escritos de los cuales solo se conocen seis, que de acuerdo con el desarrollo de la época él mismo le llamó Arithmetica. También se conocen los fragmentos de sus Números Poligonales y Porismas. Estos libros vinieron a tener importancia 1,200 años después de haber sido escritos, ya que, como decía en 1463 Regiomontano, "En estos libros antiguos se halla oculta la flor y nata del conjunto de las aritmética, en Ars Rei et Census que actualmente conocemos por el nombre árabe de Algebra".

Diofanto descubrió las leyes del pensamiento y el arte de discurrir. Planteaba buscar, de acuerdo con la lógica, una cantidad desconocida o incógnita con generalizaciones. Esta incógnita la representó por el signo s' que de acuerdocon la cantidad de incógnita tenía una representación, así s" para una y ss para varias.

Los problemas de este gran genio matemático hacen referencia a los números abstractos e introdujo por primera vez el uso de las letras y signos especiales para el cálculo, ayudando así a nacer una corriente algebraica denominada por Messelman "Algebra Sincopada", que contribuyó al surgimiento de otra más avanzada, el Algebra Simbólica actual.

Se le atribuyó a su tumba el epitafio siguiente: *"Esta es la tumba que guarda las cenizas de Diofanto. Es verdaderamente maravillosa porque, gracias a un artificio aritmético, descubre toda su existencia: Dios le permitió ser niño durante 1/6 de su vida, luego de 1/2 de su vida sus mejillas se cubrieron de barba, después de 1/7 encendió la llama del matrimonio del que, a los cinco años tuvo un hijo, pero este niño, desgraciado, aunque amado apasionadamente, murió apenas llegado a la mitad de la vida alcanzada por su padre, el cual vivió aun cuatro años más mitigando su dolor con sus investigaciones sobre la ciencia de los números"*. De esto se desprende que Diofanto murió a los 84 años, fue niño hasta la edad de 14, le brotó barba a los 21, contrajo matrimonio a los 33 y tuvo un nene a los 38, el cual murió cuando su papá tenia 80 años:

$$1/6\ x + 1/2\ x + 1/7\ x + 4 = x$$

Diofanto usó para la incógnita un símbolo único hasta la sexta potencia y usó también palabras adecuadas para indicar la suma, la resta y la igualdad. Resolvió de una manera perfecta los sistemas de ecuaciones que tienen más ecuaciones que incógnitas, considerando solamente las soluciones positivas aunque no ignoraba las negativas.

Su contribución con el verdadero simbolismo, el método analítico en la resolución de problemas, la simplificación y la generalización, lo hace considerar como el Padre del Algebra.

IV.3 Equivalencia. Propiedades.

¿Cuándo una cosa es equivalente a otra?

Mercedes y Rosita tenían una discusión sobre cuál pesaba más, si una libra de azúcar o 16 onzas de habichuelas, entonces se dirigen al colmado y Mercedes pide una libra de azúcar y Rosita pide 16 onzas de habichuelas. ¿Cuál pesa más? le preguntan al del colmado.

Pues, miren les dice el del colmado - *Esos dos paquetes pesan lo mismo* –

¿Qué quiere usted decir? - Le preguntan.
El vendedor:- *Que una libra es lo mismo que 16 onzas*-
Rosita: *Entonces -¿Una libra equivale a 16 onzas?*
Mercedes: *Correcto*.

Si a la libra de azúcar la nombras por *a* y la libra de habichuelas por *h*, entonces puedes decir que: *a* equivale a *h* y lo expresas así: $a \equiv h$.

Pero también puedes decir que una libra de habichuelas equivale a una libra de azúcar, entonces: $h \equiv a$, cuando aparece esta situación se dice que hay ***reciprocidad.***

También puedes decir que una libra de azúcar equivale a 16 onzas de azúcar, entonces
Si $a \equiv a$, esto te indica que hay ***reflexividad.***

Si una libra de azúcar pesa lo mismo que una libra de habichuelas y una libra de habichuelas pesa lo mismo que una libra de piedras = p entonces una libra de azúcar pesa lo mismo que una libra de piedras:

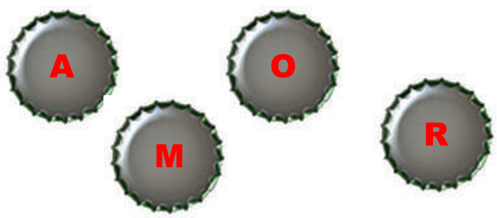
Si $a \equiv h \wedge h \equiv p \implies a \equiv p$ lo que indica la ***transitividad*** de la equivalencia.

Esto te indica que la equivalencia tiene tres propiedades:

Reflexiva: Si $a \in$ A entonces $a \equiv a$
Simétrica: Para $(a, b) \in$ A, si $a \equiv b$ entonces $b \equiv a$
Transitiva: Para $(a$, b, c$) \in$ A, si $a \equiv b \wedge b \in c$, entonces $a \equiv c$

IV.3.1 Ecuaciones.

Al comienzo del año escolar te ofrecen un concurso:



"*Si formas la palabra* Amor *con las letras que aparecen en las tapas de refrescos de la marca A,* más $20.00 obtienes un libro". Si formaste la palabra Amor después de consumir 50 refrescos ¿Cómo expresarías esta situación?

50 refrescos + $20.00 = libro

Entonces has utilizado el signo = para relacionar los refrescos más los 20.00 pesos con el libro.

¿Cuándo tienes que utilizar el signo =? ¿Cuántos conjuntos relaciona el signo =?

¿Puedes utilizar el signo = como la frontera de dos conjuntos relacionados?

En la celebración de los 15 cumpleaños de Mercedita, Carlos quiere saber su edad y le pregunta a su abuela, quien le dice : --cuanto tu naciste Mercedita tenía tres años.

Para Carlos saber su edad tiene que hacer el siguiente razonamiento: ***”Mi edad es x años, que sumándole tres años es igual a la edad de Mercedita que tiene 15 años”:***

Entonces Carlos plantea esta relación: $x + 3 = 15$

Si puedes construir situaciones donde tengas que utilizar el signo =, estás formando situaciones de igualdad, donde el signo = separa dos conjuntos de situaciones relacionadas entre sí, donde cada conjunto es un miembro de la situación planteada.

$$\{a + b\} = \{c + d\}$$
primer miembro = segundo miembro

Como ya conoces la relación de igualdad entre dos cantidades, puedes hacer algunas prácticas:

Establece una igualdad al relacionar tu edad con la de un amigo o familiar, así:

- Tu edad + x años = edad de tu amigo.
  Si le restas los x años a los dos miembros ¿Qué obtienes ? ¿Aparece otra igualdad?
- La edad de tu amiga menos x años = tu edad.
  Si le sumas los x años a ambos miembros: ¿Se obtiene otra igualdad?
- La mitad de tu edad = edad de tu hermanito.
  Si multiplicas ambos miembros por dos: ¿Qué obtienes?
- El duplo de tu edad es igual a la edad de tu tía.
  Si divides ambos miembros por dos: ¿Obtienes otra igualdad?
  Si has hecho la práctica habrás comprobado que siempre se obtiene otra igualdad, por esto puedes enunciar el principio fundamental de la igualdad así:

Si en ambos miembros de una igualdad realizas una misma operación obtienes otra igualdad.

- Cuando planteas una situación que tiene variables, entonces estás planteando una ecuación o una identidad.

¿Cuándo planteas una ecuación?

El caso de Héctor es el planteamiento de una ***ecuación***: porque la proposición que él forma es verdadera para x = 12, lo que significa que la igualdad que se convierte en proposición verdadera para algunos valores de las variables que la forman es una ***ecuación***.

$x + 3 = 15$

$x + b = c$ *si x es variable y a,b,c constantes*
$x + y = b$ *si x ^ y variables y b constante*
$ax^2 + bx + c = 0$ *si x es variable y a,b,c constantes*

¿Cuándo puedes plantear una identidad?

Si tienes la igualdad $[x + y]^2 = x^2 + 2xy + y^2$ puedes comprobar que se convierte en proposición verdadera para todos los valores posibles de las variables, entonces esta es una identidad.

¿Cuál es la diferencia que observas entre ***ecuación*** e ***identidad***?

♣ Pudiste comprobar que el grado de una expresión algebraica lo representa el término de mayor grado, del mismo modo la ecuación se nombra por el término que tenga la variable con mayor grado, por esto puedes decir, ecuación de: primer grado, segundo grado, tercer grado, etc.

$ax + b = c$ es una ecuación de primer grado con una variable *x ^ a, b y c* constantes

$3x + 2 = 17$ se convierte en una proposición verdadera para $x = 5$, ya que

$3(5) + 2 = 17$ entonces tiene una sola solución

$ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación de segundo grado con una variable *x ^ a, b y c* constantes

$x^2 - 4 = 32$ se convierte en proposición verdadera para $x = 6$ ^ $x = -6$, porque

$(6)^2 - 4 = 32$

$36 - 4 = 32$ entonces tiene dos soluciones.

$(-6)^2 - 4 = 32$

$36 - 4 = 32$

$ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ es una ecuación de tercer grado con una variable x ^ a, b c y d constantes
Estas ecuaciones tienen tres soluciones.

$x^3 - 2 = 25$ es una ecuación de tercer grado.

En este curso tendrás que practicar las ecuaciones de primer grado con una variable y las demás las practicarás en los cursos siguientes:

Ecuaciones de primer grado en una variable.

Una ecuación de la forma $ax + b = 0$, si $a, b \in R$ y $a \neq 0$ es una ecuación de primer grado en la variable x.

¿Cómo hallas el conjunto solución: $\{x / ax + b = c\}$?

Tienes que restar b en ambos miembros de la igualdad:

ahora tienes que dividir ambos miembros por a

$$ax + b - b = c - b$$
$$ax = c - b$$
$$\frac{ax}{a} = \frac{c - b}{a}$$
$$x = \frac{c - b}{a}$$

♣ Si tienes que determinar el conjunto solución de: $\{x/3x - 5 = 25\}$

¿Qué sucede si sumas 5 en ambos miembros de la igualdad?

$$3x - 5 + 5 = 25 + 5$$
$$3x = 30$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{30}{3}$$
$$x = \mathbf{10}$$

si divides ambos miembros por 3 ¿Qué pasa?

entonces el conjunto solución es: $\{x/x = 10\}$

♣ Halla el conjunto solución de: $5x + 6 = 3x + 18$

Solución:

Tienes que restar 6 en ambos miembros y luego restar 3x en los dos miembros ahora divides ambos miembros por 2 el conjunto solución es: $\{x/x = 6\}$

$$5x + 6 - 6 = 3x + 18 - 6$$
$$5x = 3x + 12$$
$$5x - 3x = 3x + 12 - 3x$$
$$2x = 12$$
$$2x \div 2 = 12 \div 2$$
$$x = 6$$

1. ***Si a ambos miembros de una igualdad le sumas o restas una misma cantidad obtienes otra igualdad.***
2. ***Si a ambos miembros de una igualdad los multiplicas o divides por una misma cantidad obtienes otra igualdad.***

♣ Si tienes que hallar el conjunto solución de: $\{x/3x - 2a = 2x + 5b\}$

Solución:

Debes seguir los pasos explicados anteriormente colocando en la rayita el término que falta:

sumas $2a$ en ambos miembros y
restas $2x$ en ambos miembros
¿Qué queda en ambos miembros?

$$3x - 2a + \_\_\_\_ = 2x + 5b + \_\_\_\_$$
$$3x - \_\_\_\_ = 2x + 5b + 2a - \_\_\_\_$$
$$x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

entonces el conjunto solución es : $\mathbf{\{x/x = 2a + 5b\}}$

♣ Ahora encuentra el conjunto solución de: $\{\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\}$

Solución:

Si multiplicas todos los términos por 4 ¿Qué sucede?

$$4(\tfrac{1}{2} x) + 4(\tfrac{1}{4}) = 4(\tfrac{1}{2})$$
$$2x + 1 = 2$$
$$2x + 1 - 1 = 2 - 1$$
$$2x = 1$$
$$x = \_\_\_\_\_$$

Recuerda: que para multiplicar quebrados multiplicas numerador por numerador y denominador por numerador y denominador por denominador.

El conjunto que convierte la proposición en verdadera es: $\{x/x = \_\_\_\_\}$

♣ Halla el conjunto que convierte esta proposición en verdadera: $\dfrac{2x - 5}{2x + 1} = 3$

Solución:

Si multiplicas ambos miembros de la igualdad por $(2x + 1)$ ¿Qué pasa?

$$\cancel{(2x + 1)}\frac{(2x - 5)}{\cancel{(2x + 1)}} = 3(2x + 1)$$
$$2x - 5 = 6x + 3$$

sumando $5 - 6x$ en ambos miembros obtienes :

$$2x - 5 + 5 - 6x = 6x + 3 + 5 - 6x$$
$$-4x = 8$$

divides por -4 queda :

$$\frac{\cancel{-4}x}{-4} = \frac{8}{-4}$$
$$x = -2$$

El conjunto solución es: $\mathbf{\{x/x = -2\}}$

IV.3.2 Valor Absoluto.

La distancia de Santo Domingo a Guerra es de 31 *kilómetros*, desde Guerra a Bayaguana es de 25 *kilómetros* y desde Bayaguana a Monte Plata es de 20 *kilómetros*. Determina la distancia desde Santo Domingo a Monte Plata y desde Monte Plata a Santo Domingo.

¿Cuál es la diferencia entre las distancias?

Colócate en Santo Domingo o en Monte Plata y elige un sentido positivo o negativo con respecto a tu posición.

¿Existe alguna diferencia en las distancias después de colocarte en uno de los extremos?

Elige a Guerra o a Bayaguana y considera un sentido positivo o negativo y determina las distancias en ambos sentidos. ¿Qué sucede a la distancia negativa o a la positiva ? ¿Altera su longitud por el sentido en que están?

La longitud desde Santo Domingo a Monte Plata es: $31\ km + 25\ km + 20\ km = 76\ km$ y la longitud desde Monte Plata hasta Santo Domingo es: $20\ km + 25\ km + 31\ km = 76\ km$, Si desde Santo Domingo hacia Monte Plata consideras un sentido positivo y desde Monte Plata a Santo Domingo es el sentido negativo, puedes decir que el valor absoluto de la distancia desde Monte Planta es $76\ km$, y lo expresas así : $|-76\ km| = 76\ km$

Entonces, ¿Cuál es el valor absoluto de -5? Pues, $|-5| = 5$, del mismo modo $|-n| = n$

¿Qué conclusión sacas del ***valor absoluto***?

Si tienes la expresión $|x + 5| = 8$, ¿Qué te indica? Pues, que el valor absoluto de $x + 5$ es igual a 8, eso quiere decir $+(x + 5) = 8$ y que $-(x + 5) = 8$; entonces tienes que resolver para ambos casos:

Comprueba el valor *x* que convierte la proposición en verdadera:

$+(x + 5) = 8$	$-(x + 5) = 8$		
$x + 5 = 8$	$-x - 5 = 8$		
$x + 5 - 5 = 8 - 5$	$-x - 5 + 5 = 8 + 5$	$\|x + 5\| = 8$	$\|x + 5\| = 8$
$x = 3$	$-x = 13$	$\|3 + 5\| = 8$	$\|-13 + 5\| = 8$
	$x = -13$	$\|+8\| = 8$	$\|-8\| = 8$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. *Encierra en un círculo el valor que convierte la proposición en verdadera:*

1. $3x + 5 = 23$ $\{3, 6, 9\}$
2. $8 + 12y = 56$ $\{2, 4, 6, 8\}$
3. $19 - 10m = 24 - 5m$ $\{-1, -2, -3\}$
4. $52 + 8x = 21x + 13$ $\{1, 3, 5, 7\}$
5. $3t - 10 = 9t + 2$ $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$
6. $7x - 1 = -2(4x + 23)$ $\{-1, -2, -3\}$
7. $8a + 4 = 2a + 7$ $\{½ , 1/3, ¼\}$
8. $85z - 3 = 7z - 9$ $\{1, 3, 5, 7\}$
9. $4x + 6 = 9x - 19$ $\{3, 5, 7, 9\}$
10. $2w - 5(3w + 1) = 31$ $\{1, 3, 5, 7\}$

2. *Encuentra el conjunto solución de:*

1. $5x - 15 = 2x - 6$
2. $34 - 4x = 2 + 4x$
3. $10y - 21 = 7y - 3$
4. $3x - 16 = 7x + 8$
5. $7 - 2y = 9 + 3y$
6. $11m - 1 = 6m + 2$
7. $5 - [4 - 2x] = 4(x - 3) - 1$
8. $10x = 23 + 3[5 - 3x]$
9. $4x + 5 = -2[4 - (2 + 3x)]$
10. $2/5[x - 1] + ½ x = ½$

3. *Coloca en el cuadrito el valor de cada expresión:*

1. Si $x = 2$ entonces $|3x - 7| =$ ☐
2. Si $y = -1$ entonces $|9 - 3y| =$ ☐
3. Si $n = -5$, entonces $|3n - 2| =$ ☐
4. Si $b = 3$, entonces $|-5b + 2| =$ ☐
5. Si $m = -3$ entonces $|5m - 2| =$ ☐
6. Si $a = ½$ entonces $|4a + 5| =$ ☐
7. Si $t = ¾$, entonces $|½ t - ¼| =$ ☐
8. Si $r = -0.2$, entonces $|-3.2 - 1.2r| =$ ☐

4. *Determina el conjunto solución de:*

1. $|3x - 1| = 7$ ☐
2. $|5x - 1| = 9$ ☐
3. $|6m - 13| = 17$ ☐
4. $2|x - 1| - 4 = 18$ ☐
5. $½ |4x - 9| + 2 = 7$ ☐
6. $|2m + 5| = 11$ ☐
7. $| 3y - 4 | = 2$ ☐
8. $3|x - 7| + 9 = 15$ ☐
9. $4|2x + 5| - 7 = 37$ ☐
10. $¾ |3m + 8| + 6 = 26$ ☐

Problemas que se resuelven por medio de ecuaciones de primer grado.

¿Qué tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra, si la distancia del Sol a la Tierra es de 150 millones de kilómetros aproximadamente y la velocidad de la luz es de 300,000 kilómetros por segundo?

Solución:

Para solucionar este problema tienes que saber que la distancia **d** de un cuerpo con movimiento uniforme, es igual a la velocidad v por el tiempo t.

Como tienes los siguientes datos: $\boxed{d = vt}$

d = 150,000,000 km
v = 300,000 km/seg

entonces puedes sustituir d y v por su igual y obtienes :

150,000,000 = 300,000 t ==> t = 150,000,000 ÷ 300,000
t = 500 segundos = 8 minutos y 20 segundos

♣ Si del dinero que tienes, gastas 1/5 en dulces y ½ en refrescos y aún te quedan $3.00 ¿Cuánto tenías?

Solución:

Lo que tenías eran *x pesos*, gastaste 1/5 *x* en dulces y ½ *x* en refrescos y aún tienes $3.00, entonces debes plantear:

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}x + 3.00 = x$$

multiplicas ambos miembros por 10 para eliminar denominadores:

$$10\left(\frac{1}{5}x\right) + 10\left(\frac{1}{2}x\right) + 10(3.00) = 10x$$

simplificas el primer miembro:

$$2x + 5x + 30.00 = 10x$$

reune las *x* en el segundo miembro:

$$30.00 = 10x - 2x - 5x$$
$$30.00 = 3x$$
$$x = 30.00 \div 3$$
$$x = 10.00$$

tenías $10.00

Compraste un libro de matemática y un estuche por $150.00. Si el libro te costó $20.00 más que el estuche.
¿Cuánto te costó cada uno?
¿Comprendes la lectura del problema?
¿Qué condiciones plantea este problema?
¿Cómo lo traduces al lenguaje matemático?
¿Cuál debe ser tu respuesta?

El valor del libro depende del valor del estuche, x es el valor del estuche, por lo que el libro será *x + 20*.

Ahora tienes: estuche + libro = 150.

Y como el estuche es x y el libro x + 20, los sustituyes por variables y tienes el siguiente planteo:

Tienes que reducir el primer miembro:

Ahora resta 20 en ambos miembros:

Divide ambos miembros por 2 y obtienes:

$$x + x + 20 = 150$$
$$2x + 20 = 150$$
$$2x + \cancel{20 - 20} = 150 - 20$$
$$2x = 130$$
$$2x \div 2 = 130 \div 2$$
$$x = 65$$

¿Quién es x ? El estuche ¿Cuánto costó? $65.00

¿Cuánto te costó el libro? $x + 20$ o sea el costo del estuche $65.00 + $20.00 = $85.00

♣ En un jardín hay 1210 flores entre rosas, jazmines y orquídeas, si las rosas son el duplo del jazmín y ¼ de las orquídeas, ¿Cuántas flores de cada clase hay?

Solución:

Si nombras por x a la cantidad de jazmines, las rosas son $2x$ y como éstas son ¼ de las orquídeas, es por que las orquídeas son 4 veces las rosas; entonces las orquídeas son $4(2x) = 8x$.

Ahora puedes plantear el problema así: rosas + jazmines + orquídeas = 1210 flores

$$2x + x + 8x = 1210$$
$$11x = 1210 \implies x = 1210 \div 11 \implies x = 110$$

Hay 110 jazmines, 2(110) = 220 rosas y 4(220) = 880 orquídeas.

♣ Un automovilista corre a 200 km por hora.
¿Cuántos km recorre en 5 horas?

Recuerda que la distancia es igual a la velocidad por el tiempo:

$d = vt$ $\quad v = 200\ km/h \quad \wedge \quad t = 5$ h entonces:

$d = 200\ km/h \times 5h = 1000\ km$

El ***dracma*** era una moneda griega que circulaba en Palestina en la época de Jesús, equivalía al ***denario*** romano y era el salario de un día de trabajo. Si un romano A podía hacer 1/5 de un trabajo en un día y otro romano B, ¼ del mismo trabajo en el mismo tiempo. ¿En qué tiempo podrían terminarlo los dos juntos? ¿Cuánto ganaría cada uno al hacerlo solo? ¿Cuánto ganaría cada uno al hacerlo juntos?

Solución:

Si A hace 1/5 de un trabajo en un día, entonces tarda 5 días en hacer el trabajo, el otro B tarda 4 días en hacer un trabajo del cual hace ¼ por día.

Si los dos trabajando juntos terminan el trabajo en x días, entonces $1/x$ es la parte del trabajo que hacen juntos por día, lo que significa que:

Como el romano A hace el trabajo en 5 días entonces:

$1/x = 1/5 + 1/4$	se gana 5 *denarios* y el B hace el trabajo en 4 días se gana 4
$1/x = 9/20$	*denarios*.
$x = 20/9 = 2\ 2/9$ días	Juntos ganan 2 2/9 *denarios*

Casi todos los problemas de la vida real puedes plantearlos en forma de ecuaciones, para eso es preciso que entiendas la parte literal del problema, las formas en que puedes relacionar las condiciones que te proporciona ese enunciado; entonces lo traduces al lenguaje simbólico y luego contestas las cuestiones que te pide el problema.

Existen muchas formas de traducir del lenguaje corriente al lenguaje matemático, tales como:

- El duplo de un número x .... $2x$
- Tres números consecutivos .... $x, x + 1, x + 2$
- Tres números impares consecutivo .... $x, x + 2, x + 4$
- Un número par .... $2x$
- Un número impar.. $2x + 1$
- Dos números pares consecutivos.. $2x, 2x + 2$
- Dos números impares consecutivos...................................... $2x +1, 2x + 2$

♣ Si tienes que hallar la edad de Julio, sabiendo que equivale al duplo de la de Laura menos 4 años y ambas edades suman 38 años, ¿Cómo determinas la edad de cada una?

Solución:

Para hallar estas edades tienes que asignarles una variable a la de menos edad, por ejemplo: Laura tiene x años y Julio tiene $2x - 4$, entonces planteas:

Laura + Julio = 38 años

sustituyes los nombres por variables, entonces :
agrupando términos semejantes
despejando x

$$x + 2x - 4 = 38$$
$$3x - 4 = 38$$
$$3x - 4 + 4 = 38 + 4$$
$$3x = 42$$
$$3x \div 3 = 42 \div 3$$
$$x = 14$$

Laura tiene 14 años y Julio tiene 2(14) - 4 = 24 años

♣ Determina tu edad, si dentro de 2 años tendrás el doble de la edad que tenía hace 4 años.

Solución:

Si actualmente tienes x años, entonces dentro de dos años tendrás x + 2, pero hace 4 años tenías x - 4, si en dos años tienes dos veces lo que tenías hace 4, lo que significa que puedes establecer la siguiente igualdad :

$$x + 2 = 2(x - 4)$$
$$x + 2 = 2x - 8$$
$$x + 2 + 8 = 2x - 8 + 8$$
$$x + 10 - x = 2x - x$$
$$10 = x$$

que simplificando puedes obtener :
de donde

lo que significa que tienes 10 años

Es el momento de practicar lo aprendido

Resuelve estos problemas en la forma que se te ha indicado:

1. ***¿Cuál es la edad de Milagros y Rosanna, si Rosanna tiene la mitad de la edad de Milagros y ambas tienen 63 años?***
2. ***Determina tres números enteros y consecutivos que sumen 249.***
3. ***Si Grisel tiene la mitad de la edad de Luisa menos tres años y la suma de las edades es 69 años ¿Cómo determinas las edades?***
4. ***Halla el número que sumado con su duplo es igual a 216.***
5. ***Tú y dos amigos tienen \$800.00, si tú tienes el doble que uno de ellos y \$30.00 más que el otro ¿Cuánto tiene cada uno ?***

6. ***Determina las edades de Rosa, Yolanda y Nurys, si la edad de Rosa es el triplo de la Yolanda y 12 años menos que la edad de Nurys, sabiendo que entre las tres tienen 96 años.***

7. ***Mildred y Maylenia son vendedoras. Maylenia vende el doble que Mildred y entre las dos cobraron RD$120.00 ¿Cuánto se ganó cada una?***

8. ***Determina cuatro números impares consecutivos que sumen 48.***

9. ***Si consigues $50.00 tienes el doble de lo que tienes más $8.00 ¿Cuánto tienes?***

10. ***¿Cual es la edad de Grisel, si sumando 13 años a su triplo, equivale a un siglo?***

IV.4 Desigualdades.

El *Pico Duarte* está situado en la Cordillera Central con una altura de 3,175 metros ; en esta cordillera están varios picos de menor elevación, como *La Paloma* [3,150m.], *La Rusilla* [3,109 m.], *Monte Bandera* [2,380m.] y otros, entonces puedes comparar : "El *Pico Duarte* con *Monte Bandera*", "*La Rusilla* con el *Pico Duarte*", "*La Rusilla* con *Monte Bandera*".

¿Cuál es más alto? ¿Cómo lo expresas?

Pico Duarte > *Monte Bandera*

La Rusilla < *Pico Duarte*

¿Qué establecen los signos > y < ?

Observa el cuadro de distancias que hay desde la Capital hacia cualquier ciudad del país y coloca en el cuadro el signo > o <, según la ciudad indicada se encuentre a mayor o menor distancia:

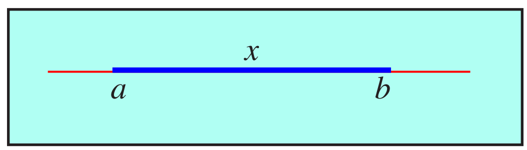
DISTANCIA EN KILOMETROS	AZUA	BANI	BONAO	COMEN-DADOR	CONS-TANZA	COTUÍ	DAJABÓN	EL SEIBO	HATO MAYOR	HIGUEY	JARABA-COA	JIMANI
SANTO DOMINGO	120	65	85	255	140	105	305	135	102	145	**155**	**280**
	LA RO-MANA	LA VEGA	MAO	MOCA	MONTE CRISTI	MONTE PLATA	NAGUA	PEDER-NALES	PUERTO PLATA	RIO S. JUAN	SABANA DE LA MAR	SABANETA
	110	125	210	145	270	53	180	335	215	239	**155**	**245**
	SALCEDO	SAMANA	SAN CRIS-TOBAL	SAN FCO.	S. JOSÉ OCOA	SAN JUAN	SAN PEDRO	SANTIA-GO	SOSUA	NEIBA	BARAHONA	STO. DGO.
	160	245	30	135	115	200	70	155	240	230	**200**	**0**

Piensa en el trayecto desde tu casa a la escuela. Tú eres una variable x que vas ocupando posiciones según caminas hacia tu destino [la escuela], puedes estar en tu casa, estar en el trayecto o estar en la escuela; esto te da la idea de intervalo, que

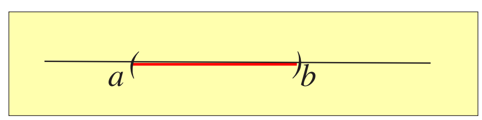
C--------------x----------------E

es el conjunto de posiciones que pueden suceder entre dos puntos específicos.

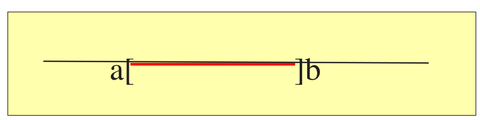
Si tienes una trayectoria y marcas dos puntos *a* y *b*, puedes decir que el conjunto de puntos x comprendidos entre estas marcas representa un intervalo abierto, donde *a* es el extremo inferior y *b* es el extremo superior, si el punto *x* puede estar en a y también en *b* entonces el intervalo es cerrado, pero si *x* está en una de las marcas *a* o *b* entonces es mixto.



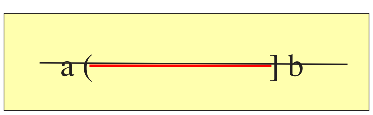
El intervalo abierto lo vas a expresar en la forma: *(a, b),*



mientras que para el cerrado usarás la forma [*a, b*]

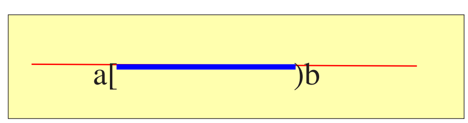


y para el mixto (a, b]



ó

[a, b)



significa que un intervalo abierto es el conjunto: $A = \{x/a < x < b \wedge x \in \Re\}$, un intervalo cerrado es el conjunto $C = \{x/a \leq x \leq b < x \in R\}$, un intervalo mixto es uno de los sub-conjuntos : $I = \{x/a < x \leq b \wedge x \in \Re\}$ $\wedge$ $D = \{x/a \leq x < b \wedge x \in \Re\}$

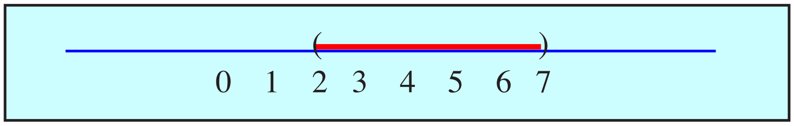
Ejemplos

Dibujar los intervalos:

1. $A = \{x/2 < x < 7 \text{ si } x \in \Re\} = (2, 7)$

Solución:

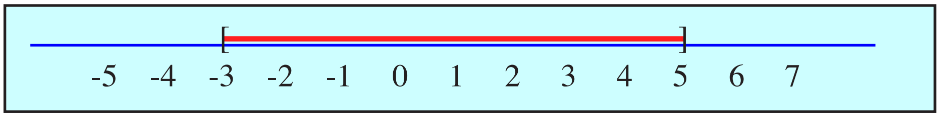
Puedes trazar una recta y elegir un punto de partida 0, entonces eliges una escala y comienzas a marcar hacia la derecha del 0, ya que tanto el 2 como el 7 son positivos, así:



2. $C = \{x/-3 \leq x \leq 5 \text{ si } x \in \Re\} = [-3, 5]$

Solución:

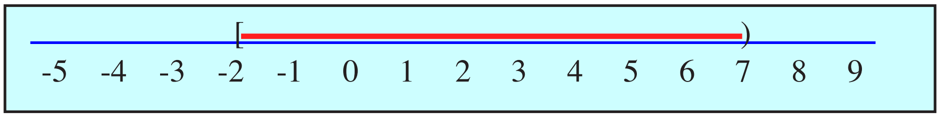
Este es un intervalo cerrado, entonces tienes que marcar los puntos -3 y 5, después que traces una recta numérica con su escala correspondiente, así:



3. $I = \{x/-2 \leq x < 7 \text{ si } x \in \Re\} = [-2, 7)$

Solución:

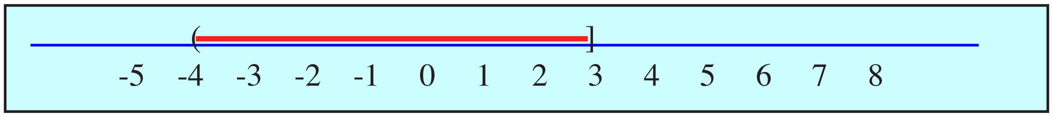
Como puedes observar este es un intervalo mixto, o sea cerrado por la izquierda y abierto por la derecha. Traza una recta y marca el origen, el conjunto de los números negativos los marcas hacia la izquierda de cero y los positivos a la derecha del cero, así :



4. $D = \{x/ -4 < x \leq 3 \text{ si } x \in \Re\} = (-4, 3]$

Solución:

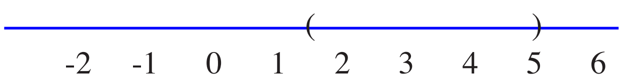
Este es otro intervalo mixto, es decir, abierto por la izquierda y cerrado por la derecha, traza tu recta numérica y marcas los conjuntos de números reales, así :



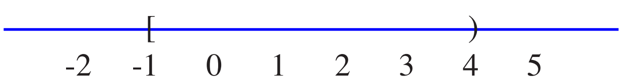
5. Si $A = \{x/ \frac{1}{2} < x < 5 \wedge x \in \Re\}$, $B = \{x/ -1 \leq x < 4 \wedge x \in \Re\}$, $C = \{x/x \geq 2 \wedge x \in \Re\}$ y $D = \{x/x \geq -1 \wedge x \in R\}$, determina: 1. $A \cap B$ 2. $A \cup B$ 3. $D - C$

Soluciones:

1. ***Para que puedas hallar los elementos comunes de A y B es preciso que traces ambos intervalos y así puedes darte cuenta del conjunto de puntos comunes:***

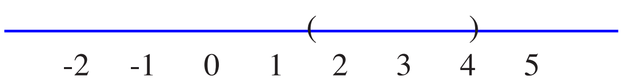


$A = \{x/ \frac{1}{2} < x < 5 \wedge x \in \Re\}$



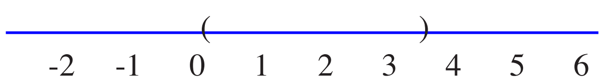
$B = \{x/ -1 \leq x < 4 \wedge x \in \Re\}$

$A \cap B =$

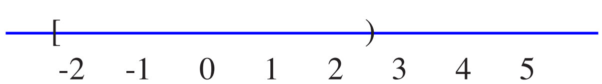


$= \{x/ \frac{1}{2} < x < 4 \wedge x \in \Re\}$

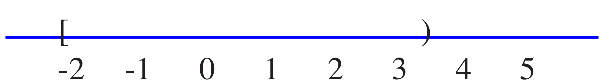
2. ***¿Qué significa $A \cup B$? Pues, todos los elementos de A más todos los elementos de B, teniendo en cuenta que los comunes se consideran una sola vez.***



$A = \{x/ \frac{1}{2} < x < 5 \wedge x \in \Re\}$

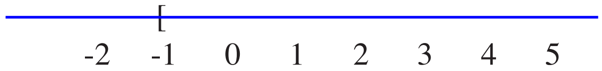


$B = \{x/ -1 \leq x < 4 \wedge x \in \Re\}$

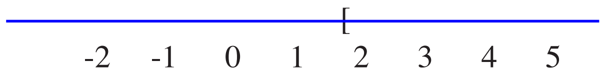


$A \cup B = \{x/ -1 \leq x < 5 \wedge x \in \Re\}$

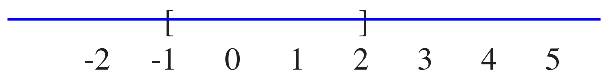
3. ***¿Qué significa D - C? Pues, todos los elementos que están en D que no están en C.***



$D = \{x/x \geq -1 \wedge x \in \Re\}$



$C = \{x/\ x \geq 2 \wedge x \in \Re\}$



$D - C = \{x/-1 \leq x \leq 2 \wedge x \in \Re\}$

Es el momento de practicar lo aprendido

Dibuja los siguientes intervalos y ponle una A si es abierto, una C si es cerrado y una M si es mixto, para (x, y) $\in \Re$.

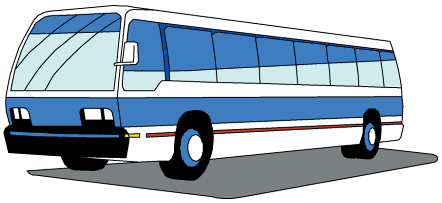
1. $A = \{x/0 < x < 7\}$
2. $B = \{y/5 \leq y \leq 12\}$
3. $C = \{x/-2 < x \leq 5\}$
4. $D = \{y/-6 \leq y < -1.5\}$
5. $E = \{x/x \geq -3\}$
6. $F = \{y/y \leq -2\}$

Encuentra y dibuja cada uno de estos conjuntos.

1. $A \cap B$
2. $B \cup D$
3. $A - C$
4. $E \cup F$
5. $A \Delta B$
6. $A \cup F$
7. $D \cup (B \cap C)$
8. $C \cap A$
9. $D \cap (A \cup C)$
10. $B - (F \cup E)$
11. $C \Delta B$
12. $(A \cup B) - (A \cap B)$
13. $B - A$
14. $D \Delta A$
15. $(F \cup D) \cap C$

IV.5 Inecuaciones de Primer Grado en una variable.

El peso de un automóvil más 30 kg es menor que el peso de un autobús.
Esto significa que tienes que plantearte la desigualdad:



Autobús > Automóvil + 30 kg.

$y > x + 30$

Si construyes desigualdad con una variable, donde un conjunto de valores de dicha variable convierten la desigualdad en una proposición verdadera, entonces has formado una inecuación.

Si tienes la desigualdad $\{x/ax + b < c \wedge a,b,c \in \Re\}$ y deseas saber el conjunto de valores de x que la convierten en una proposición verdadera, tienes que aplicar las propiedades de la desigualdad, así :

resta b en ambos miembros:

divides ambos miembros por a

$$ax + b - b < c - b$$
$$ax < c - b$$
$$ax \div a < (c - b) \div a$$
$$x < (c - b) \div a$$

Ejemplos:

Determina el conjunto que convierte estas desigualdades en proposiciones verdaderas:

1. $\{x/x + 5 > 8 \wedge x \in N\}$

Solución:

Tienes que aplicar las propiedades de la desigualdad: $x + 5 > 8$

Restas 5 en ambos miembros y obtienes: $x + 5 - 5 > 8 - 5$

$$x > 3$$

2. $\{x/x - 3 < 7 \wedge x \in N\}$

Solución:

Si sumas 3 a ambos miembros de la desigualdad obtienes: $x - 3 < 7$

$$x - 3 + 3 < 7 + 3$$
$$x < 10$$

3. $\{x/3x - 5 \geq 13 \wedge x \in N\}$

Solución:

Tienes que sumar 5 en ambos miembros:

divides ambos miembros por 3:
y obtienes el conjunto solución:

$$\begin{gathered} 3x - 5 \geq 13 \\ 3x - 5 + 5 \geq 13 + 5 \\ 3x \geq 18 \\ 3x \div 3 \geq 18 \div 3 \\ \{x/x \geq 6 \wedge x \in N\} \end{gathered}$$

4. $\{x/8 - 2x \leq 3x + 23 \wedge x \in N\}$

Solución:

Debes pensar que tienes que reunir las variables en un miembro, entonces:

$$\begin{gathered} 8 - 2x \leq 3x + 23 \\ 8 - 2x - 3x \leq 3x + 23 - 3x \\ 8 - 5x \leq 23 \\ 8 - 5x - 8 \leq 23 - 8 \\ -5x \leq 15 \\ 5x \div (-5) \geq 15 \div (-5) \\ x \geq -3 \end{gathered}$$

restas 3x en ambos miembros:

resta 8 en ambos miembros ahora divide ambos miembros por -5, recordando que al dividir por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

El conjunto solución es $\{x/x \geq 0 \wedge x \in N\}$, recuerda que N = {x/x es un número natural}

5. $\{\frac{1}{4} x - 5 > \frac{1}{2} (x - 8) \wedge x \in R\}$

Solución:

¿Cómo eliminas los denominadores y trabajas únicamente con enteros?

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{4} x - 5 > \tfrac{1}{2} (x - 8) \\ 4[\tfrac{1}{4} x - 5] > 4[\tfrac{1}{2} (x - 8)] \\ x - 20 > 2x - 16 \\ x - 20 - x > 2x - 16 - x \\ -20 > x - 16 \\ -20 + 16 > x - 16 + 16 \\ -4 > x \\ \{x/x < -4 \wedge x \in R\} \end{gathered}$$

Multiplicas ambos miembros por el denominador común: (4)

agrupas las variables en un miembro, restando x en ambos miembros, sumas 16 a ambos miembros,
El conjunto que convierte la desigualdad en verdadera es:

Es el momento de practicar lo aprendido

Determina y dibuja el conjunto solución:

1. $2x + 4 < 9 - x$
2. $3z - 5 > 1 - z$
3. $4 - 3m \geq 2m - 6$
4. $2x - 5 \leq 7$

Autoevaluación

I. Completa con el sentido correcto.

1. Una igualdad problemática y _______________ formada por cantidades conocidas llamadas___________ y cantidades desconocidas llamadas _________________ y que se satisface la igualdad para determinados valores de las ______________ es una _______________

2. Si en ambos miembros de una ____________ se efectúa una misma _____________ se obtiene otra igualdad.

3. El ___________ de una ecuación se determina por la variable de mayor grado.

4. Las ___________ de una ecuación se determina por su grado.

5. Dos ecuaciones con iguales raíces son _____________________

6. Según el número de raíces de una ecuación puedes clasificarla en: _____________ grado, ____________grado, ___________ grado hasta n ________________.

7. Las cantidades que aparecen a ambos miembros del signo = se nombran como _______

8. La expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra, es una __________________

9. La ________________ es una desigualdad condicional formada por cantidades conocidas que son los datos, y desconocidas que con las __________________, y que se satisface la desigualdad para un conjunto de valores de las ______________.

10. Si $a > b$ y $b > c$, entonces _____________

11. *Si $a > b$ y $c > 0$, entonces ac ____ bc*

12. *Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \div c$ ___ $b \div c$*

13. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \div c$ ___ $b \div c$*

14. *Si $a + c < b + c$, entonces ________________________*

15. *Si $a > b$ y $c < 0$, entonces ac ____ bc*

16. *Si $a < b$ y $c < 0$, entonces ac ____ bc*

17. *Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \div c$ __ $b \div c$*

II. Coloca en la raya el conjunto solución de cada ecuación o inecuación.

1. $0.2y - 4.3 = 0.9 - 1.1y$
2. $4(y - 1) = 7y + 2(3 - y)$
3. $3/2[x - 1] + 2/3[x - 3] = 3$
4. $\dfrac{3 + 1}{x + 2\ x - 2x} = 4$
5. $[x^2 - x + 1] \div (x - 1) = x + 1 \div (x - 1)$
6. $(3x + 4) \div (6x - 5) = (2x + 5) \div (4x - 1)$
7. $\frac{1}{2} (x + 6) - 1/3 (x - 3) = \frac{1}{2} (x + 8) - 1/5 (x + 4)$
8. $16 - 4n \geq 0$
9. $2x < 2x - 5$
10. $3y - 4 > 5y + 8$

III. Resuelve los siguientes problemas.

1. Encuentra tres números que sumen 72, sabiendo que uno excede a otro en 12 y el tercero es el duplo de los anteriores.

2. Calcula las edades de Ramón y Rosa, si la edad de Rosa es la mitad de la de Ramón y hace 20 años la edad de Rosa era 1/3 de la de Ramón.

3. ¿Cuántos caballos y gallos hay en un corral, si se cuentan 82 cabezas y 236 patas?

4. Reparte 1,300 pesos entre Grisel, Rosanna y Martha, de forma que a Rosanna le toque el doble que a Grisel y a Martha le toque la cantidad que tienen Grisel y Rosanna juntas.

5. Si dos números suman 50 y uno aumentado en 8 unidades equivale al otro disminuido en 2. ¿Cuáles son esos números?

6. Entre Grisel y Héctor tienen 88 años. Determina ambas edades si la edad de Grisel es igual a la mitad de la de Héctor más 7 años.

7. Determina el número que sumado con sus dos tercios equivale a su quíntuplo más 24.

8. En una escuela los alumnos del segundo son 2/5 de los de primero. Si en ambos cursos hay 140 alumnos ¿Cuántos alumnos hay en cada curso?

9. Un triciclero vende 2/5 del peso de su mercancía en la mañana y 2/3 del resto en la tarde, si le quedan 60 kg, ¿Cuántos kg tenía el triciclo?

10. El profesor de matemática califica 30 exámenes el primer día y el segundo día califica 2/5 de los que le faltan. Si aún le quedan 3/8 del total, ¿Cuántos alumnos se examinaron?

UNIDAD V

EL MUNDO GEOMÉTRICO

Introducción

Se ha dicho en el marco teórico, que los objetivos generales de los cursos universitarios de nivelación son ***apoyar el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes en torno a la matemática.***

Con el objeto de alcanzar estos objetivos se propone un método de trabajo adecuado a la matemática, así como un conjunto de ejercicios que permiten al estudiante afianzarse en los procesos mentales que en cada unidad en que se ha dividido este curso de nivelación, se presentan.

Objetivos específicos de esta unidad:

En esta quinta unidad del ***"Curso universitario de nivelación"*** que lleva el titulo ***"El mundo geométrico"***, aparece una gran cantidad de ejercicios, que intentan, además de fortalecer el dominio de los conocimientos y destrezas propias de su contenido, reforzar una amalgama bien amplia de funciones mentales, como son las capacidades: de razonamiento, de flexibilidad mental, de creatividad, de resolver problemas. Pero sobre todas ellas, parece importante resaltar como objetivo básico de esta unidad V, la aptitud de elaborar demostraciones de teoremas o afirmaciones matemáticas.

Ya que esta aptitud conlleva la ejercitación…
de un amplio conjunto de procesos mentales, como;

- *el aprendizaje de una serie de conceptos básicos::*
- *la aplicación práctica de los mismos,*
- *y el desarrollo de funciones mentales,como*
    - *razonar,*
    - *discriminar elementos*
    - *analizar procedimientos*
    - *identificar los pasos a dar para alcanzar la demostración o justificación evidente de un teorema o expresión geométrica*

En síntesis, esta unidad debe ser considerada como fundamental para el *enriquecimiento intelectual* que se busca con estos cursos de nivelación; ya que al estar acompañada de figuras geométricas y del trabajo con espacios, añade una nueva dimensión al ejercicio de las funciones mentales que proponen las otras unidades, más abstractas y simbólicas, como son el álgebra y la aritmética, etc.

Sistematización de ejercicios propuestos para desarrollar este proceso:

De modo que se propone trabajar un modelo de procesamiento que permita reforzar básicamente la capacidad de demostración siguiendo este procedimiento; como puede verse en este ejercicio modelo.

Si P es el punto medio de AB y X es un punto cualquiera de AB, demuestra que: 2PX = XB – XA

Para esta demostración tienes que sacar los datos que se te ofrecen y con los conocimientos que tienes de los postulados analizados, puedes llegar a la conclusión deseada, teniendo en cuenta que toda afirmación debe tener una justificación.

Afirmación	Razón
PX + PB = XB	El todo es igual a la suma de sus Partes.
PX + XA = PA	
PX = XB - PB	Despejas PX
PX = PA - XA	sumas miembro a miembro.
2PX = XB - PB + + PA - XA	P punto medio de AB.
PA = PB	Eliminando partes iguales.
2PX = XB - XA	Lqqd. (lo que sequeria demostrar)

En esta clase de ejercicios lo importante es:

1º El alumno por su lado:

- intenta *aislar los datos básicos* de los enunciados,
- *relacionarlos con los conocimientos* que tiene de los postulados explicados en cada sección,
- e *ir avanzando en la formulación de afirmaciones justificada*s, que van llevándonos a la meta deseada: demostración de la expresión propuesta (Lqqd:lo que se quería demostrar)

2º Finalmente el profesor…

- invitará a los alumnos a hacer una reflexión sobre los pasos dados, haciendo un esquema similar al presentado en el libro; a identificar la clase de relación y justificaciones propuestas así como señalar la evidencia encontrada.
- intentará que los alumnos den el nombre que suele darse a este proceso, tras una investigación por internet,

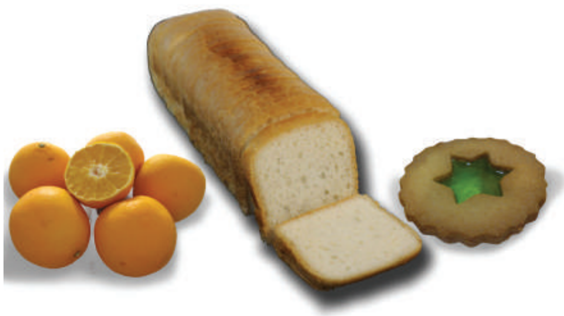
- en todo caso se ponderará la importancia que tiene para el enriquecimiento intelectual el desarrollo de este proceso mental.
- por último, recalcará que pueden haber diversos caminos para llegar a demostrar la proposición, y que lo importante es que cada alumno aplique su creatividad e intente buscar su propio camino que le conduzca a la afirmación (lqqd)

V.1 Introducción al mundo geométrico.

Observa el televisor de tu casa, ¿Qué forma tiene? ¿Puedes distinguir algún punto? ¿Cuántas líneas puedes marcar? ¿Se forma algún ángulo?

Haz una lista de todos los puntos que observas en el televisor, las líneas que distingues y los ángulos que se forman.

Este mundo está rodeado de formas geométricas, desde que te levantas hasta que te acuestas. Observa por doquier formas geométricas.



Si haces un concurso con tu amigo para saber quien nota mayor cantidad de formas geométricas en el día, te asombrarías.

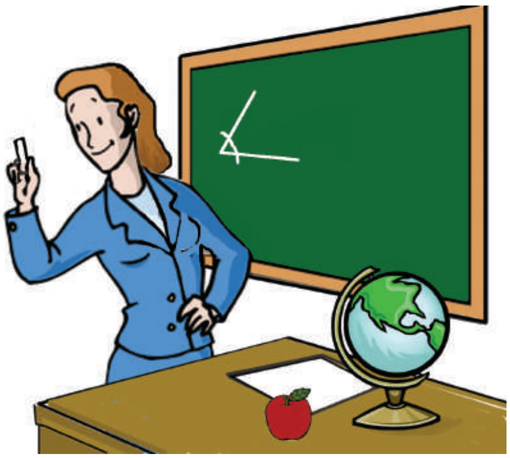
Cuando recibes los alimentos, tienes necesariamente que notar las forma geométricas que tienen. Los instrumentos que utilizas tienen formas geométricas

Tu escuela es una geometría en todas sus partes: la pizarra, el borrador, la puerta, el aula, el pupitre, el cuaderno, el lápiz, etc.

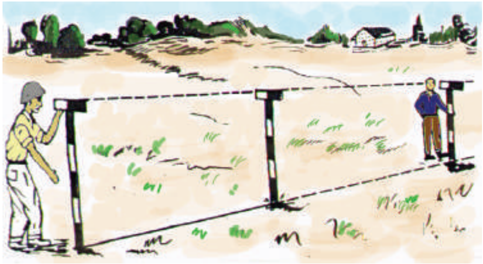
La geometría está contigo y no te has dado cuenta, pero, ¿Cómo surge el concepto geométrico que estudias en la escuela?

¿Tienen alguna relación las formas geométricas que observas en tu medio con los conceptos que estudias? ¿Todo lo que observas fue cuidadosamente calculado geométricamente?

El más grande geómetra es el Creador, pues te ofrece una naturaleza llena de geometría: el Universo forma la gran maravilla geométrica.



Observa esta hoja: ¿Cuántos puntos distingues? ¿Cuantas líneas puedes señalar? ¿Qué línea forma su borde? ¿Cuántas líneas se cortan? ¿Cuántas líneas tienen más de un punto en común?



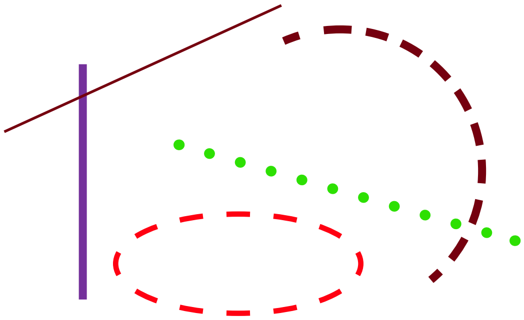
La geometría nace por la necesidad de medir la tierra. Hoy en día todo tienes que medirlo: el tiempo, el trabajo, las clases, los estudios, etc., esto significa que tu mundo es geometría.

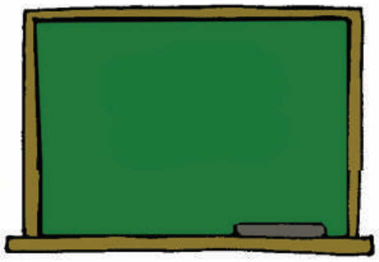
Tu ropa tiene diversas formas geométricas:

Haz una lista con tres objetos, dos ropas, cuatro utensilios de cocina, tres dulces, dos árboles, un vehículo, tres partes de tu cuerpo, de tal manera que representen formas geométricas e indica a qué figura geométrica se te parece.

V.2 Conceptos Primarios. Postulados.

¿Qué es un punto? ¿Cuántos puntos necesitas para formar una línea? ¿Cuántas líneas necesitas para formar un plano? ¿Cuántos Planos necesitas para formar un cuerpo?
Afila bien tu lápiz y dibuja un punto(•), luego propone dibujar muchos puntos sucesivos en cualquier dirección y únelos lo más que puedas ¿Qué estás formando?





Esto significa que puedes trazar líneas rectas o líneas curvas.
La pizarra es una superficie plana, ¿Cuántos puntos puedes trazar en la pizarra?¿Cuántas líneas puedes trazar en el plano que representa la pizarra?¿Qué criterio tienes de superficie?

¿Cómo distingues la superficie que observas en una mesa con la superficie que tiene una roca ?

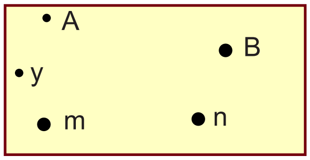
Estas figuras, son geométricas, marca: puntos, líneas y superficies.

Es el momento de practicar lo aprendido

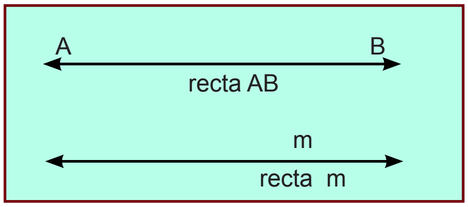
1. ***Indica tres ejemplos prácticos que te den la idea de punto.***
2. ***Escribe tres cosas de tu uso que tengan forma de línea.***
3. ***Escribe tres objetos que expresen la idea de superficie plana.***
4. ***Escribe tres superficies no planas.***
5. ***Haz una lista de tus cosas favoritas y expresa su forma geométrica.***

** La geometría, como las demás ramas de la matemática, tiene su propio lenguaje, por eso se afirma que el punto, la línea y la superficie son ***conceptos primarios***; esto es, que tienes que admitirlos sin definiciones precisas y aunque sepas distinguirlos.

Geométricamente un ***punto*** no tiene tamaño, sino posición, y se nombra por una letra del alfabeto, sea mayúscula o minúscula.

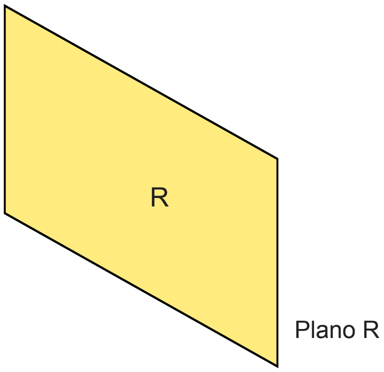


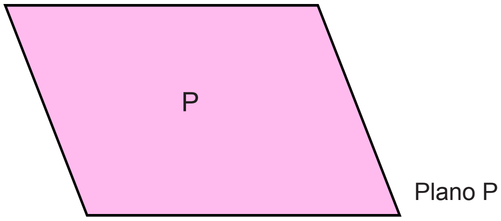
La ***recta*** la consideras como la línea que puedes prolongar indefinidamente en dos sentidos opuestos. Una ***recta*** la concibes sin anchura, la cual nombras con dos letras o con una letra, sea mayúscula o minúscula como tú consideres.

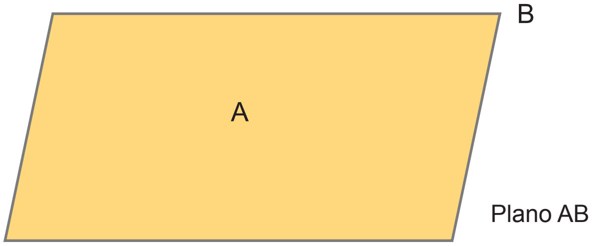


El ***plano*** lo concibes como una superficie llana que es indefinida en toda su extensión. El conjunto de todos los puntos forma un plano.

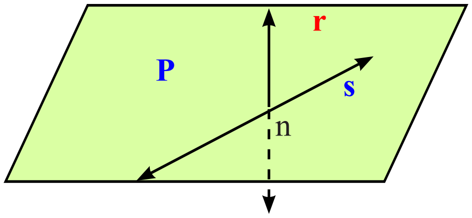
Para operar con el plano debes entenderlo como la figura que se forma cuando se cortan cuatro rectas dos a dos, y lo identificas por dos letras en puntos opuestos, o, por una letra en su interior, así:



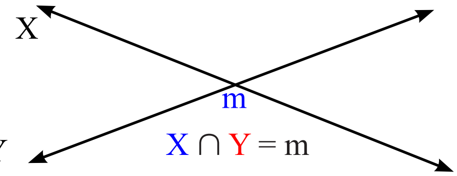


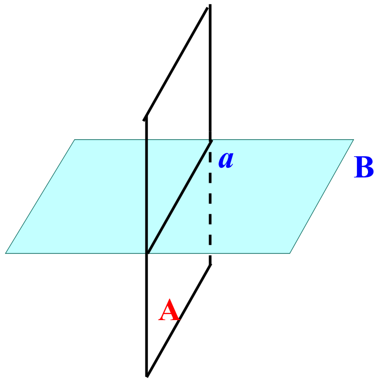


Las relaciones entre punto, recta y plano puedes verlas al observar los dibujos siguientes :



$s \in P$ ^ $P \cap s = n$ ^ $r \notin P$



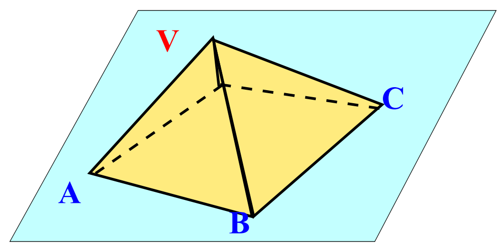


El conjunto de puntos que forma una línea recta lo llamas ***puntos colineales***, pero si es un conjunto de puntos que forma un plano, entonces lo llamas ***puntos coplanarios***.

Esta casita de campaña está asentada en el plano P, con una base coplanaria formada por los puntos A, B, C y D. A y V son colineales al igual que B y V, C y V, D y V

¿Cuáles otros puntos son ***colineales***?

Una recta divide un plano en dos semi-planos

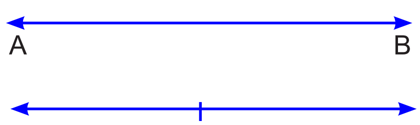


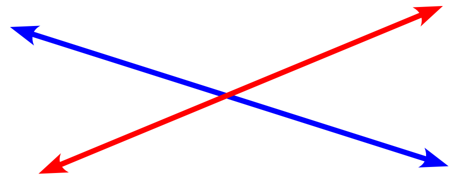
El ***espacio*** lo consideras como el conjunto de todos los puntos posibles.

En el lenguaje geométrico se utilizan, con mucha frecuencia estos conceptos: ***postulado, teorema y corolario.***

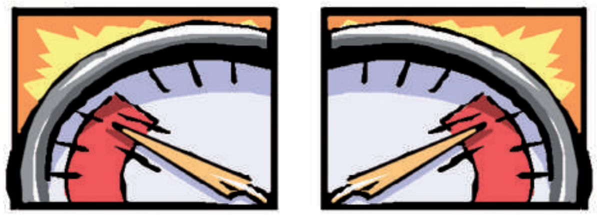
¿Qué es un postulado? Pues, una proposición que se admite intuitivamente, como verdadera, como :

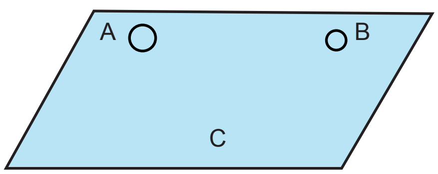
1. Una recta queda perfectamente definida cuando pasa por dos puntos.
2. Una recta es indefinida en ambos sentidos.



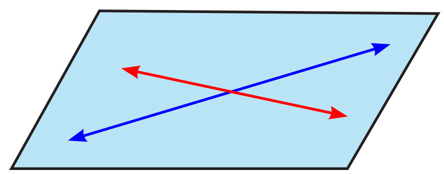


3. La intersección de dos rectas es un punto.
4. La totalidad de cualquier cosa es igual a la suma de sus partes.
5. Cualquier cantidad la puedes reemplazar por su igual.
6. Una figura puedes hacerla cambiar de posición y no se altera su forma ni sus dimensiones.
7. Un plano lo puedes considerar determinado por:

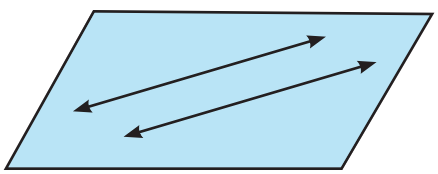




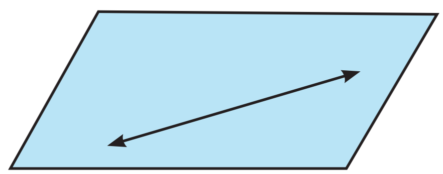
Tres puntos no alineados



Dos rectas que se intersecan

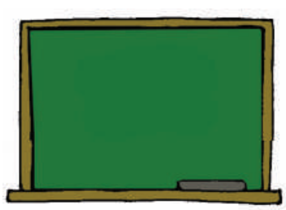


Dos rectas paralelas



Una recta y un punto exterior a ella

Observa estos planos y compáralos con los postulados anteriores:



¿Qué es un ***teorema*** ? Pues, una proposición verdadera demostrable.

El teorema es una proposición condicional, *si* ***p***, *entonces q*, donde ***p*** representa los datos o hipótesis y ***q*** la conclusión o tesis.

¿Qué es un ***corolario***? Es una proposición que es consecuencia de otra proposición.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Dibuja:

a. Un punto y traza 10 rectas por él.
b. Dos puntos y traza todas las rectas que pueden pasar por ellos al mismo tiempo.
c. Dos rectas que se cortan e indica su intersección
d. Dos planos cuya intersección sea la recta AB
e. Las rectas $a \cap b = c$, que se encuentran en el plano P.
f. Los planos $P \cap R = m$, donde la recta $r \in R$ ^$r \notin P$, $s \in P$ ^ $s \notin R$.
g. Los puntos *a, b y c* están en el plano P, pero no están sobre una misma recta.
h. Los planos $A \cap B = n$, $r \in A$ ^ $r \notin B$, $n \cap r = m$
i. El plano $X \cap Y = a$ ^ $X \cap Z = b$, si $Y \cap Z = \phi$
j. Dos rectas a y b que se cortan en c y pertenecen al plano A.

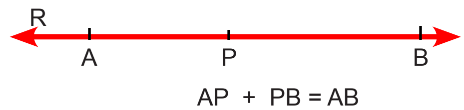
2. Coloca una V a las proposiciones verdaderas y una F a las falsas:

1. Por un punto puedes trazar infinitas rectas
2. Por un punto puedes trazar infinitos planos
3. Una recta pasa únicamente por dos puntos
4. Una recta puede contener un punto
5. Un plano queda determinado por una recta y un punto exterior
6. Con dos puntos puedes formar un plano
7. Tres planos con una recta común forman un plano
8. Si tres puntos no están sobre una misma recta, entonces forman un plano
9. Tres planos que se cortan tienen una recta en común
10. La recta es la distancia entre dos puntos.
11. Tres planos pueden tener una recta común
12. Tres puntos colineales forman un plano
13. Por una recta pasan infinitos planos
14. Siempre puede pasar una recta por tres puntos
15. Si dos puntos están en un plano, la recta que determinan está en el plano

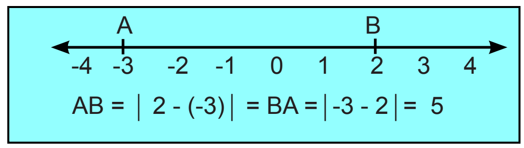
V.3 Segmentos y Rayos.

Segmento de Recta.

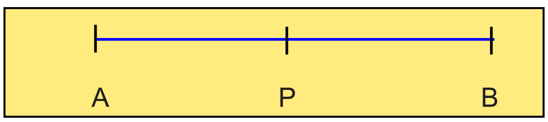
Si dices que un punto P está situado entre los puntos A y B de una recta, esto quiere decir que :
Entonces tienes una recta R y una parte de R, segmento AB,



¿Qué diferencia encuentras entre $\overleftrightarrow{AB}$ $\wedge$ $\overline{AB}$?
La longitud del segmento AB es la distancia entre sus extremos, y la puedes determinar por el ***valor absoluto*** de $|B - A| = |A - B|$



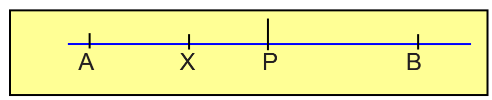
** Si P es el punto medio del segmento AB, significa que AP = PB



AP + PB = AB

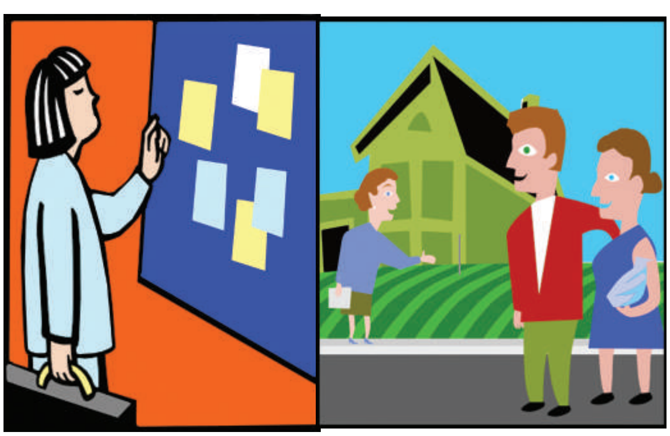
Si AP = PB => AB = 2AP = 2 PB
=> AP = ½ AB ^ PB = ½ AB

Si P es el punto medio de AB y X es un punto cualquiera de AB, demuestra que: 2PX = XB - XA



Para esta demostración tienes que sacar los datos que sete ofrecen y con los conocimientos que tienes de los postulados analizados, puedes llegar a la conclusión deseada, teniendo en cuenta que toda afirmación debe tener una justificación.

Afirmación	Razón
PX + PB = XB PX + XA = PA	El todo es igual a la suma de sus partes.
PX = XB - PB PX = PA - XA	Despejas PX
2PX = XB - $\cancel{PB}$ + + $\cancel{PA}$ - XA	sumas miembro a miembro.
PA = PB 2PX = XB - XA	P punto medio de AB. Eliminando partes iguales. Lqqd. (lo que sequeria demostrar)



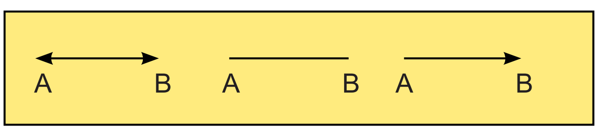
Para tres números ***a***, ***b*** y ***c*** cualesquiera, se cumplen las propiedades siguientes:

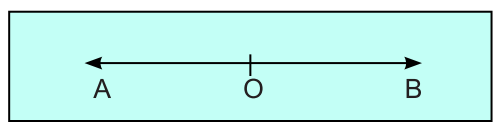
Reflexiva	$a = a \wedge b = b \wedge c \equiv c$
Conmutativa	$a + b = b + a \wedge ab = ba$
Simétrica	Si $a = b$ entonces $b = a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$
Transitiva	Si $a = b \wedge b = c$ entonces $a = c$
Identidad	$a + 0 = a = 0 + a$
	Si $a > b \wedge b > c$ entonces $a > c$
Inversa	$a + (-a) = 0 = -a + a$
	Si $a < b \wedge b < c$ entonces $a < c$
Comparativa	$a = b$ ó $a > b$ ó $a < b$
Aditiva	Si $a = b$, entonces $a + c = b + c \wedge a - c = b - c$
	Si $a > b$, entonces $a + c > b + c \wedge a - c > b - c$
	Si $a < b$, entonces $a + c < b + c \wedge a - c < b - c$
Sustitutiva	Si $a = b$, entonces a puede sustituirse por b.
Distributiva	$a(b + c) = ab + ac \wedge (b - c)a = ba - ca$

Rayo o Semi-recta.

Observa al cazador cuando aprieta el gatillo, mira la trayectoria que sigue la bala, esto te da la idea de rayo o semi-recta. Tienes un punto de partida, una dirección y un sentido.

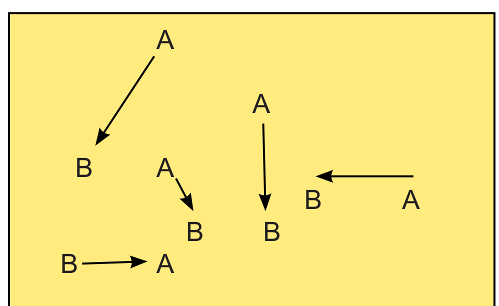
Si eliges un punto de partida u origen A y una dirección, que es la recta que pasa por B, entonces tienes el rayo AB o la semi-recta AB. El rayo AB puede aparecer en diversas posiciones, pero siempre te indica cuál es el origen y sobre qué recta se mueve.





Establece la diferencia entre la recta AB, el segmento AB y el rayo AB.

Si en la recta AB el punto O está entre A y B, entonces los rayos OA y OB están en una misma dirección, pero con sentido contrario.



Rayos AB

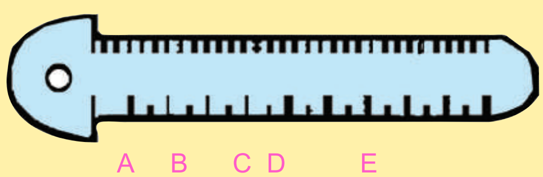
Es el momento de practicar lo aprendido

A. Escribe una V a la proposición verdadera y una F a la falsa.

1. Por dos puntos pasa únicamente un segmento rectilíneo
2. El rayo tiene longitud definida
3. La longitud de un segmento es siempre un número positivo
4. Tres puntos de un plano siempre son colineales
5. Dos rayos opuestos tienen un mismo origen
6. El segmento es la intersección de dos rectas
7. El camino más corto entre dos puntos es su distancia
8. Un rayo tiene la misma longitud que su segmento
9. Si A, B y C son puntos colineales entonces AB + BC = AC
10. Si O es el punto medio del segmento XY, entonces OX > OY
11. Si los puntos x, y, z están sobre la recta r, entonces yx es un segmento.
12. El rayo AB es equivalente al rayo BA.
13. Si ¼ de un segmento es 7, entonces el segmento mide 28
14. Si M es el punto medio del segmento AB, y MB = 7, entonces MA = 14
15. Si x representa la coordenada 2 y es el punto medio de pq $\wedge$ p está en la coordenada -5, entonces q está en la coordenada 9.

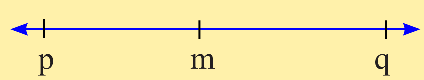
B. Completa correctamente.

1. Toma una regla y en el borde de los centímetros marca cinco puntos: A, B, C, D y E luego, determina sus coordenadas:



A = ____ B = ____ C = ___ D = ___ E = ___las longitudes : AB = ____
AC = ____ BD = ___ CE = ___ AE = ____

2. En la recta r, m es el punto medio del segmento pq, entonces :



a. Si mp = 7 entones pq = ____
b. Si la coordenada de m es -3, entonces la coordenada de p es ___ y la de q es ___ y la longitud de pq es ___
c. Si pq = 24 y p está en el punto -5, entonces m está en el punto ___ y q en el ___
d. Si la coordenada de p es -1 y la de q es 7, entonces la de m es ___ y pq = ____
e. El rayo mp es congruente al rayo ____

3. Si la coordenada de A es -6, la de B = -16 y la de C = 15 , AC = ____

4. Si AB = 24cms., ∧ AC = 3BC, entonces AC = ____ ∧ BC = ____

5. Si P, Q, y R son puntos colineales, busca el que falta :

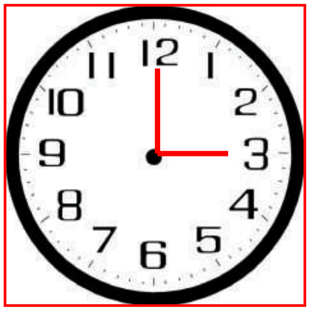
   a. PQ = 12, QR = 7, entonces PR = ____
   b. QR = 6.75, PR = 28.35, entonces PQ = ____
   c. PR = 8 ½, QR = 5 ¾, entonces PQ = ____
   d. PQ = 8.5, PR = 15.2, entonces QR = ____
   e. QR = 17.2, PQ = 6.45, entonces PR = ____

6. Si C es un punto del segmento AB, de forma que AC = 5AB, pero BC = 32, entonces tienes que determinar los segmentos AB y AC.

7. Traza un segmento mn, con los puntos internos p, q, r, de forma que mp = 3x, pq = 2x+3, pq = qr, rn = mp + 5. Si mn = 51, ¿Cuál es la medida de cada segmento ?

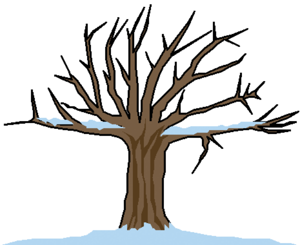
8. Si B es el punto medio de AC y M es un punto de BC; determina los segmentos que se forman si el segmento AC mide 40 cm.

V.4 Ángulo. Clasificación. Medidas.



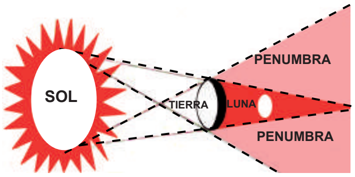
Concepto de ángulo. Clasificación.

Observa que el reloj, marca las 3:00, las agujas del minutero y del horario son rayos que forman ***ángulos.***

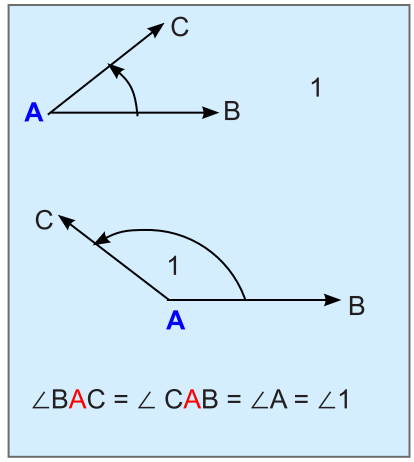


Las ramas de este árbol simulan rayos que te dan una idea clara de ***ángulos***.

Estos rayos de sol, te indican ángulos



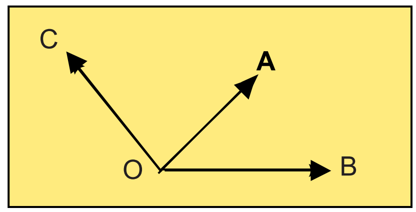
¿Cuántas ramas nacen desde un mismo punto en esta palma?



Si un rayo AB tiene un punto común con otro rayo AC, puedes decir que ambos rayos forman el ángulo BAC o el ángulo CAB, que lo puedes llamar por una letra: ángulo A, o por un número en su interior: ángulo 1

Para referirte a un ángulo utilizas el símbolo ∠ .

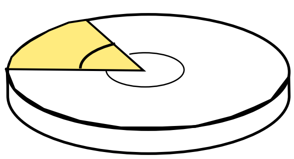
Los rayos que forman el ángulo son sus lados y el punto común es su vértice, así AB y AC son los lados del ángulo ángulo BAC y A es su vértice.



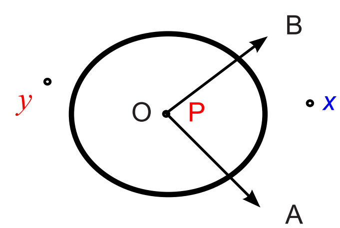
¿Cuántos ángulos hay en la figura ? Nómbralos

Los lados del ∠AOB son ___ ∧ ___ su vértice es ____.
Los lados del ∠AOC son ______ ∧ _____ y su vértice es ____ y los lados del ∠BOC son ____ ∧ ____ con su vértice ____

Los lados de un ángulo son rayos, por tanto su longitud es indefinida.



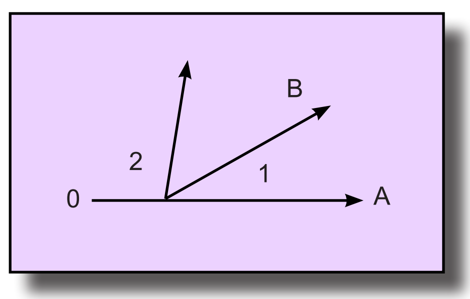
La capacidad del disco duro de tu cumputadora expresa dos tipos de ángulos el espacio usado con respecto al espacio libre.



Los rayos OA y OB determinan el plano P, pero como O es común a ambos rayos entonces se forman los ángulos: ∠AOB convexo y ∠BOA cóncavo o no-convexo.
El punto *x* es interno al ángulo convexo pero el punto *y* es externo.

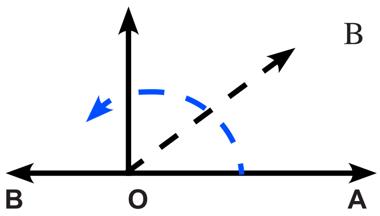
Puedes dibujar ángulos convexos seguidos uno al otro.

Puedes abrir un abanico de mano en las siguientes formas



El ∠ 1 es consecutivo al ∠ 2

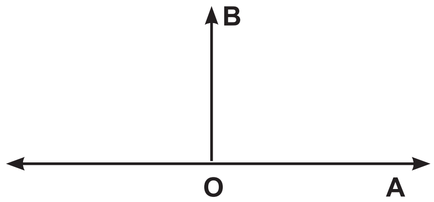
Si haces girar el rayo OA hacia arriba hasta ocupar la posición OB, entonces obtendrás un ángulo convexo.



Cuando OB está en la dirección de OA, has formado un par lineal o ángulo llano, o ángulo de semi-giro.

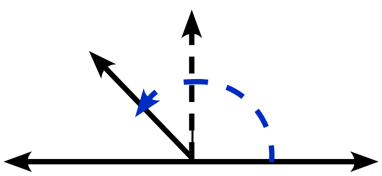
Postulado : Todos los ángulos llanos son congruentes.

Los ángulos consecutivos que forman un par lineal, son ***adyacentes***.



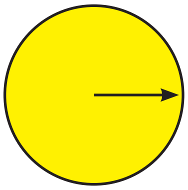
Si OB está en la mitad del par lineal, has formado un ángulo ***recto***. ∠AOB

Postulado :Todos los ángulos rectos son congruentes.



Si OB pasa de la mitad del par lineal, tienes un ángulo obtuso o cóncavo.

Pero si OB vuelve a ocupar la posición de OA, entonces habrás dado una vuelta completa, lo que significa que formaste un ángulo completo perígono.

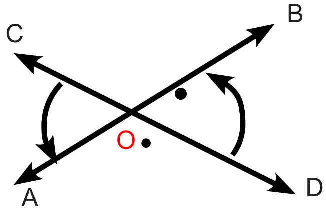


RECUERDA QUE:

Ángulo es el espacio formado por dos rayos que se cortan.

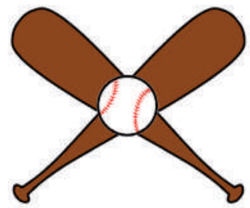
Los ángulos pueden ser: Llanos, rectos, agudos, obtusos, consecutivos, adyacentes, cóncavos, convexos, completos.

Observa las aspas de la figura, ¿Cuántos ángulos se forman? Marca los rayos opuestos. Ponle nombres a esos rayos y determina los ángulos formados.



Si tienes el ángulo ∠AOB y con sus rayos opuestos se forma el ángulo ∠COD, entonces estos ángulos están opuesto por el vértice O, al igual que los ángulos ∠BOC y ∠COD.

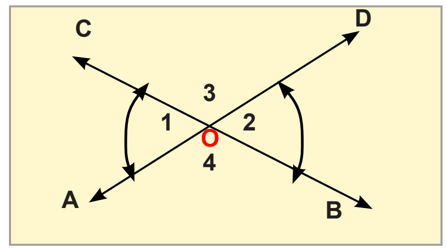
Teorema :



Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

¿Cómo puedes demostrar que estos ángulos son congruentes ?

Antes de embarcarte en una demostración debes verificar los conceptos que puedes aplicar de los ya aprendidos que te sirvan de argumentos válidos para justificar las proposiciones que debes emplear para lograr tus fines.



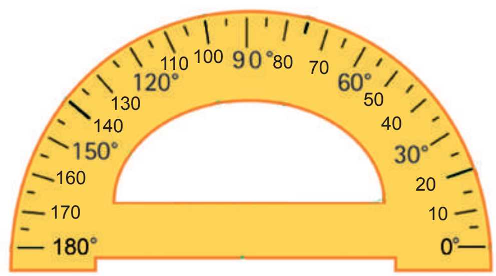
¿Qué conoces de los ángulos opuestos por el vértice?

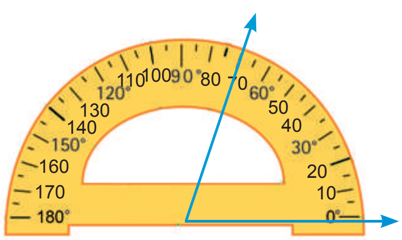
¿Cuántos ángulos forman los rayos opuestos ?
$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle AOC$, $\angle BOD$,
$\angle 1 + \angle 3 = \angle BOD \quad \wedge \quad \angle 3 + \angle 2 = \angle AOC$ forman un par lineal,
pero $\angle AOC = \angle BOC$ [todos los ángulos que forman par lineal son congruentes]
entonces : $\angle 1 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 2$ [ley transitiva de la igualdad]
restando $\angle 3$ en ambos miembros, te queda: $\angle 1 = \angle 2$ y como estos ángulos son opuestos por el vértice O, entonces son congruentes.

¿Dónde encuentras ángulos opuestos por el vértice ?

Medida de ángulos.

Esta figura te muestra un **transportador**, el cual sirve para medir ángulos. Como puedes ver está graduado, con las medidas en grados sexagesimales, desde 0 grado hasta 180 grados, contados de 10 en 10.

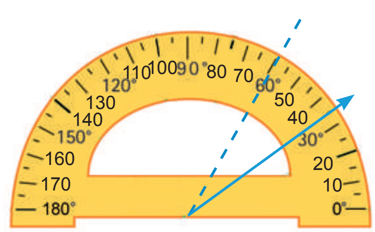




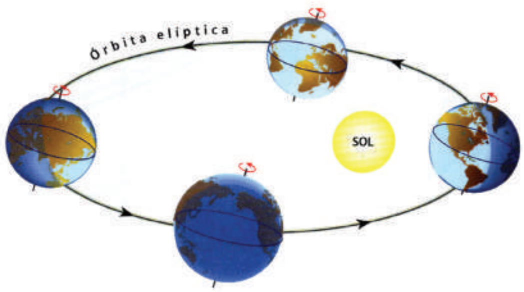
La medida del $\angle AOB$ es 70°.

Si tienes este ángulo y deseas saber su medida, debes colocar el **transportador** de forma que el centro quede justamente en el vértice y luego lees la medida que está sobre el lado terminal del ángulo.

Si quieres hallar la mitad de éste ángulo, entonces marcas en el transportador 35° y trazas el OC, que es el rayo bisectriz del $\angle AOB$.

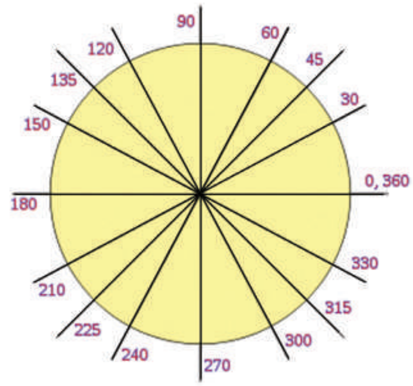


Con el transportador puedes medir cualquier ángulo.



La Tierra gira alrededor del Sol, pero tarda un día en dar una vuelta completa al girar sobre su eje.

Los Babilonios midieron el recorrido de la tierra utilizando la base ***60,*** por esto crearon el ***sistema sexagesimal*** para medir ángulos.
En este sistema la vuelta completa equivale a 360 grados sexagesimales y lo expresaron así: 360. Dividieron el ***grado sexagesimal*** en 60 partes iguales y a cada parte le llamaron minuto sexagesimal. Al ***minuto sexagesimal*** lo dividieron en 60 partes iguales y a cada parte le llamaron ***segundo sexagesimal***.



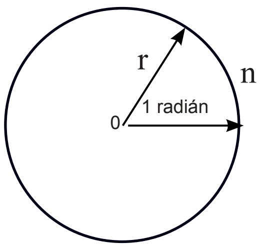
Un grado es igual a 60 minutos y lo expresas:

$1^\circ = 60'$
$1' = 60''$

y un minuto es igual a 60 segundos y lo indicas

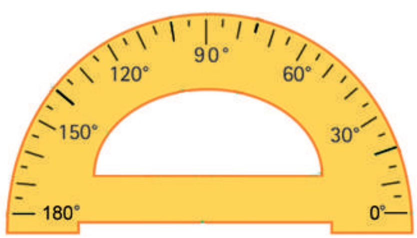
Tú puedes crear un sistema de medida de ángulos, únicamente tienes que asignar un valor a una vuelta completa y a partir de ahí puedes armar tu forma para medir ángulos.

1 g = 100 m
1 m = 100 s

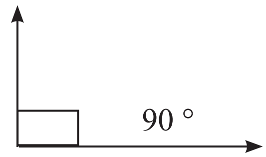


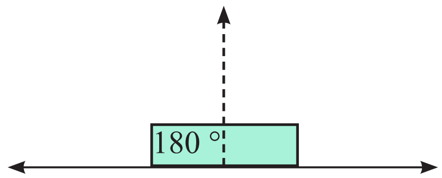
Existen otros sistemas para medir ángulos, tales como: ***Centesimal*** inventado por los franceses en la Segunda Guerra Mundial, donde el perígono tiene un valor de 400 grados y un grado centisimal equivale a 100 minutos centesimales y un minuto centesimal
equivale a 100 segundos centesimales y el ***Sistema Circular*** donde un ángulo de una vuelta equivale a 2π radián.

Toma el transportador y mide la línea roja de un cuaderno con la primera línea azul,
¿Cuántos grados mide? ¿Qué ángulo forma?
Dibújalo.



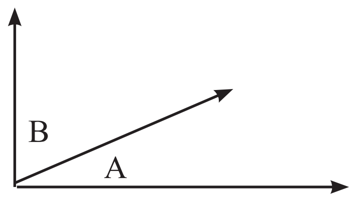
¿Qué ángulo forma la esquina del escritorio? ¿Cuánto mide?

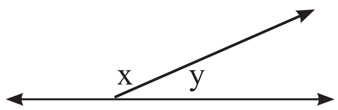




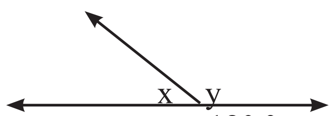
El ángulo recto mide 90 ***grados sexagesimales*** y el par lineal mide ***180 grados sexagesimales***

Dos ángulos consecutivos que suman un ángulo recto son ***complementarios***, pero si suman un par lineal son ***suplementarios***.





$\angle x + \angle y = 180\,°$



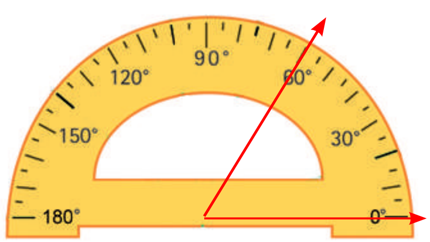
$\angle x + \angle y = 180\,°$

Los ángulos ***adyacentes*** son suplementarios

Operaciones con los ángulos.

Los ángulos puedes sumarlos o restarlos, puedes repetir un ángulo ***n*** veces si deseas, es decir, puedes multiplicar un natural por un ángulo, o puedes dividirlos en partes iguales.

Toma el transportador y mide un ángulo de 60°,súmale y réstale 15° y obtendrás dos nuevos ángulos.



$60° + 15° = 75°$ $\wedge$ $60° - 15° = 45°$

Puedes sumar o restar ángulos en grados, minutos y segundos ; pero debes tener en cuenta que: $1° = 60'$ y que $1' = 60''$.

Si $m\angle A = 60°\ 15'\ 25''$ y $m\angle B = 15°\ 30'\ 45''$ prueba que:
$m\angle A + m\angle B = 75°\ 46'\ 10''$ y $m\angle A - m\angle B = 44°\ 44'\ 40''$ así:

$m\angle A + m\angle B = 60°\ 15'\ 25'' + 15°\ 30'\ 45'' = 75°\ 46'\ 10''$
$m\angle A - m\angle B = 60°\ 15'\ 25'' - 15°\ 30'\ 45'' = 44°\ 44'\ 40''$

60°	15′	25″
+15°	30′	45″
75°	45′	70″
59°	60′	60″
60°	14′	25″
- 15°	30′	45″
44°	44′	40″

Si $m\angle x = 23^\circ\ 18'\ 39''$ *m* ∧ $y = 21^\circ\ 17'\ 32''$ *prueba que: 1.* $2m\angle x + 3m\angle y = 110^\circ\ 24'\ 54''$

Solución :
Debes multiplicar todos los componentes de cada ángulo por su coeficiente y luego reducirlos :

23°	18′	39″
		x 2
46°	36′	78″
46°	37′	18″

21°	17′	32″
		x 3
63°	51′	96″
63°	52′	36″

$2m\angle x + 3m\angle y = 46^\circ\ 37'\ 18'' + 63^\circ\ 52'\ 36''$
$= 109^\circ\ 84'\ 54'' = 110^\circ\ 24'\ 54''$

RECUERDA QUE :
Un grado es igual a 60 minutos y un minuto es igual a 60 segundos. 1° = 60′
1′ = 60″

2. m∠x - ½ m∠y = 12° 40′ 04″

Solución :
Tienes que hallar la mitad del ángulo y , para luego el cociente restarlo del ángulo x ahora:

a	23°	18′	50″
b	22°	78′	50″
	-10°	38′	46″
	12°	40′	04″

(valor derivado de a)

```
 21°   17′   32″  / 2
- 20°             10°  38′  46″
  1° = 60′:
       77′
      -76′
       1′ = 60″
          92″
         -92
           0
```

3. 4m∠y + 1/3 m∠x = 92° 57′ 21″

Solución:
Multiplica 4 por $m\angle x$ y el producto lo reduces de 4 [21° 17′ 32″] = 84° 68′ 128″ =
= 85° 10′ 8″

determinando los minutos que hay en 128° = 2’ 8”
y sumas 2 ‘ con 68′= 70′, donde hay un grado y
10 minutos.

1/3 [23° 18′ 39″] = 7° 46′ 13″

Divide el ∠*x* entre 3, 23 ÷ 3 = 7 y sobran 2° = 120′ ,
que sumados a 18′ hacen 138′ , que divididos entre 3 = 46′
ahora divide 39” ÷ 3 = 13”

85° 11’ 8” + 7° 46’ 13” = 92° 57’ 21”

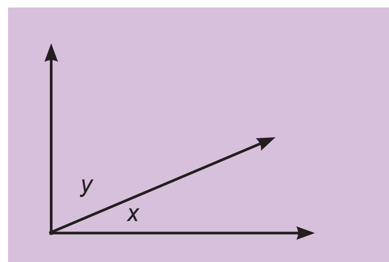
4. $\frac{3}{4}\, m\angle x - \frac{1}{2}\, m\angle y = 6^\circ\ 50'\ 13\ \frac{1}{4}''$

Solución :

Justifica estos pasos y compruébalos

$\frac{3}{4}\,[23^\circ\ 18'\ 39''\ ] = 69^\circ\ \ 54'\ \ 117''\ /\ 4$ $-68 \qquad 17^\circ\ 28'\ 59.25''$ $1^\circ = 60'$ $114'$ $-112'$ $2' = 120''$ $237''$ $-236''$ $1''$	$\frac{1}{2}\, m\angle y = 10^\circ\ 38'\ 46''$ $16^\circ\ \ 60'$ $17^\circ\ \ 28'\ \ 59.25''$ $-\ 10^\circ\ \ 38'\ \ 46.00''$ $6^\circ\ \ 50'\ \ 13.25''$

♣ Determina el ángulo que es igual al duplo de su complemento.



Solución:
Tienes dos ángulos x e y que sumados dan un ángulo recto y con la condición de que y = 2x, entonces:

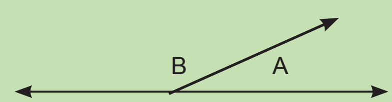
$$m\angle x + m\angle y = 90^\circ \quad pero \quad m\angle y = 2m\angle x$$

entonces : $m\angle x + 2m\angle x = 90^\circ$

$$3m\angle x = 90^\circ \ \wedge \ m\angle x = 30^\circ \ \therefore \ m\angle y = 2m\angle x = 60^\circ$$

♣ Calcula el ángulo que es igual ¼ de su suplemento.

Solución:
Tienes dos ángulos A y B que sumados equivalen a un par lineal, y con la condición de que : A = ¼ B, entonces B=4A



$A + B = 180^\circ$

$A + 4A = 180^\circ$

$5A = 180^\circ$

$A = 180^\circ \div 5 = 36^\circ$

Es el momento de practicar lo aprendido

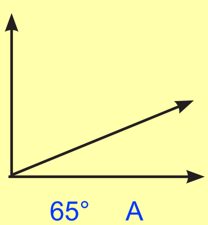
1. Plantea y resuelve:

1. Si A y B son complementarios y A = 35° 28’, entonces B = _______________
2. Si un ángulo M mide 2x, ¿Cuánto mide su complemento ? _________________
3. ¿En cuánto excede A a B si A = 38° 43’ y B = 16° 52’?
4. Si un ángulo A mide 15° menos que el doble de su complemento B, entonces A = _____________ y B = ___________________
5. Si A y B son complementarios y A = 2x + 15 y B = x - 30, entonces A = ____________ y B = _______________________
6. Si M es el triplo de N y N = 30° 25’ 15” , entonces M =__________________
7. Si C y D son suplementarios y D = 108° 24’ 15” , entonces C = _______________
8. La medida del suplemento de A es 5x, ¿Cuántos grados mide A ?________________
9. Si A y B son adyacentes y A mide 20 grados más que 4B, entonces A = ____________________ y B = ____________________________
10. Si P y Q suman 80 y uno es el triplo del otro. ¿Cuánto mide cada uno ?

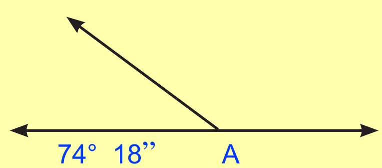
2. Determina los ángulos en cada caso :

a. Si A = 34° 23’ 46” y B = 108° 45’ 18” determina : 1. 2A + 3B
2. ¾ A - ½ B 3. ¾ [A + ½ B]

4.



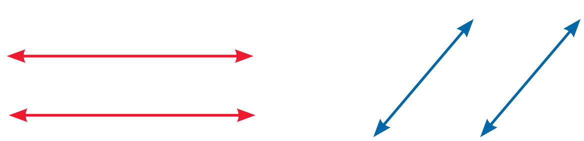
5.



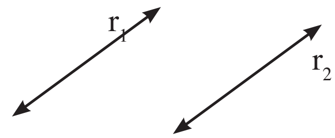
V.5 Rectas paralelas y oblicuas.

Las líneas de una hoja de papel son paralelas. Observa que la distancia entre las líneas de una mascota tienen las mismas distancias entre sí.

forma de paralelismo:



Dos rectas r_1 y r_2 son paralelas y se indica así $r_1 // r_2$,
y al estar en un mismo plano nunca pueden cortarse.



Postulado del paralelismo euclideano. Por un punto exterior a una recta, únicamente puede trazarse una paralela a ella.

V.6 Poligonal y Polígono.

¿Qué es una lineal poligonal?

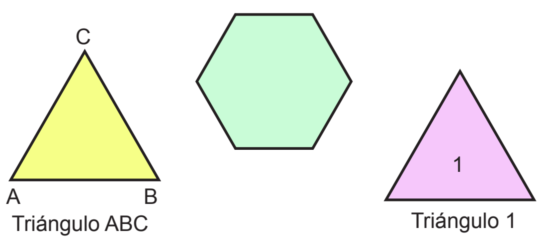
¿Has visto un laberinto?

¿Qué te representa el panal de abeja?

La ***poligonal*** es una línea formada por segmentos de rectas seguidos uno del otro pero con direcciones diferentes.

La ***poligonal cerrada*** tiene dos regiones del plano que determina, una región interior y otra exterior.

.

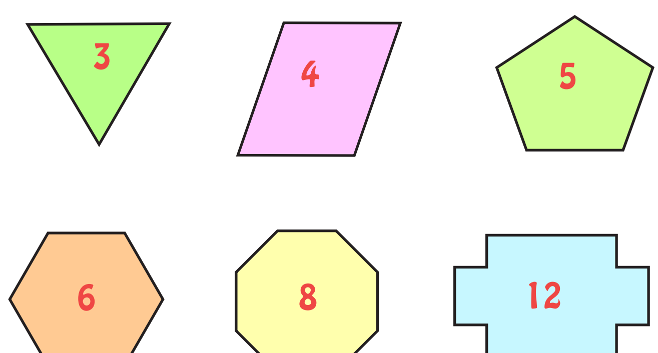


Cada polígono se nombra por las letras de sus vértices, o por un número o letra en su interior.

Los polígonos según el número de sus lados puedes nombrarlos, así: Triángulo, cuadrilátero, pentágono, exágono, heptágono, octágono, eneágono, decágono, endecágono,dodecágono, pentadecágono, etc.

El polígono es una poligonal cerrada, y el conjunto de puntos de la región interior pertenece al polígono.

Los segmentos que forman el polígono son sus lados, si el polígono es convexo y tiene sus lados y ángulos iguales, entonces es un ***polígono regular.***



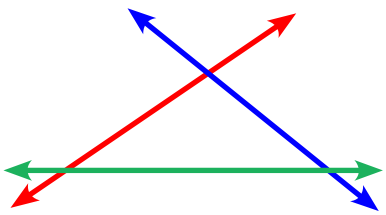
Triángulo.

¿Qué es un trío ?

El año tiene tres cuatrimestres.

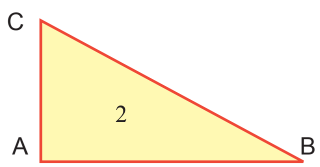
Las estaciones del año abarcan tres meses

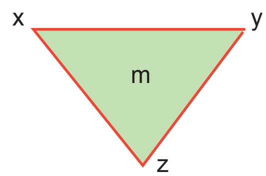
El ***triángulo*** es la figura que se produce al interceptarse tres segmentos de rectas.



El menor de los polígono es el triángulo y únicamente tiene tres lados y tres ángulos.

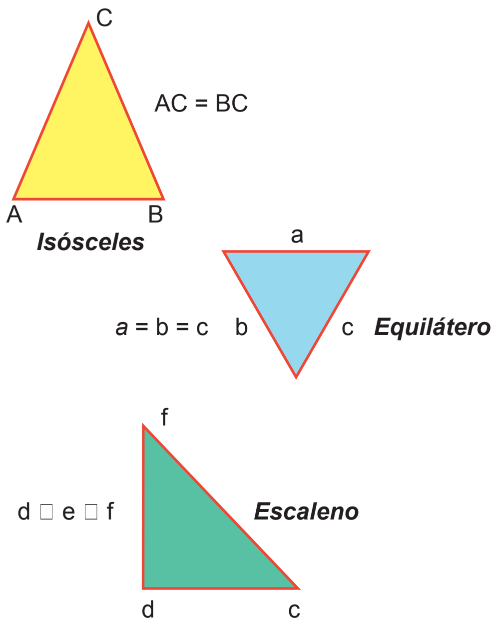
El triángulo se nombra por tres letras, una en cada vértice, por el nombre de sus lados o por un número o letra en su interior.





Clasificación de los Triángulos.

Los triángulos se clasifican por sus lados y por sus ángulos:



Según sus lados pueden ser:

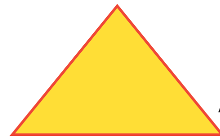
1. ***Isósceles.*** Es el triángulo que únicamente tiene dos lados congruentes.

2. ***Equilátero***. Es el triángulo que tiene sus tres lados congruentes

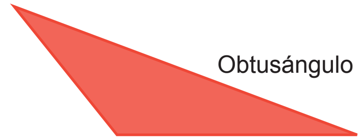
3. ***Escaleno***. Es el triángulo que tiene sus tres lados diferentes.

De acuerdo a sus ángulos los triángulos pueden ser:

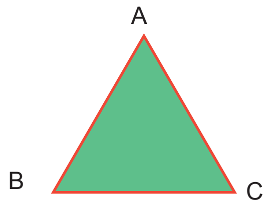
1. Acutángulo, si tiene sus tres ángulos agudos.
2. Rectángulo, cuando tiene un ángulo recto.
3 Obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso.
4. Equiángulo, si sus tres ángulos son congruentes.



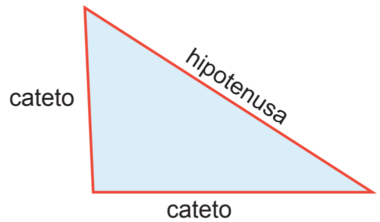
Acutángulo



Obtusángulo



triángulo equiángulo



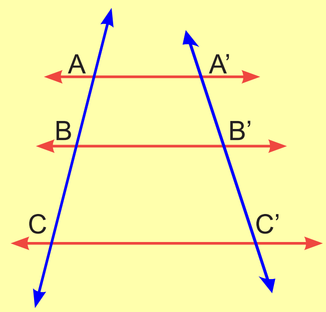
triángulo rectángulo

Es el momento de practicar lo aprendido

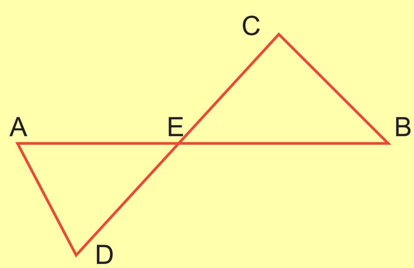
I. Completa con el sentido correcto.

1. La unión sucesiva de puntos forma una ____________________
2. La línea se clasifica en ________________ y _______________
3. Las líneas rectas pueden cortarse en forma: _________________ o _________________
4. Según el postulado euclideano por un punto exterior a una recta únicamente puede trazarse una _________________ a esa recta y solo una.
5. En dos rectas paralelas interceptadas por una secante los ángulos de fuera son los _______ y los de dentro de ellas son los _________________:
6. Los ángulos correspondientes entre paralelas son _______________________
7. Los ángulos congruentes entre paralelas cortadas por una secante son los: _____________, ______________________________, y _____________________________.
8. Los ángulos ________________ entre paralelas cortadas por una secante son suplementarios.
9. La línea ____________________ está formada por segmentos de rectas sucesivos en diferentes direcciones.
10. Las líneas poligonales pueden ser ___________________, __________________________
11. La poligonal cerrada está formada por una región ______________ y otras ___________
12. El ___________________ es una poligonal cerrada.
13. Los segmentos que forman el polígono son sus _______________.
14. El polígono puede ser ____________________ o _____________________
15. El polígono ______________________ tiene sus lados y ángulos congruentes.

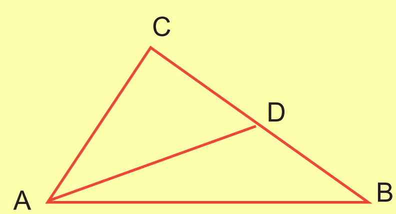
16. El menor de los polígonos es el ___________________
17. Un polígono de 15 lados se nombra como _________________________
18. El triángulo por sus lados puede ser: ____
19. Por sus ángulos el triángulo puede ser: ____
20. El triángulo que únicamente tiene dos lados congruentes es el ______________________
21. Si el triángulo tiene un ángulo recto, se llama ___________________________________.
22. El punto común a las tres alturas de un triángulo es el ____________________________.
23. El incentro es el punto común a las tres _____________________ de un triángulo.
24. El punto común a las tres medianas de un triángulo es el _________________________.
25. _________________ es el punto común a las tres mediatrices de un triángulo
26. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es _________________________.
27. Todo ángulo exterior de un triángulo equivale a suma de los _______________ no adyacentes..
28. Encuentra dos ángulos complementarios que están en la razón: 2: 3
29. Halla dos ángulos suplementarios que están en la razón 5 : 6.
30. Si AB = 3/2 CD ^ P es el punto medio de AB, y P' es el punto medio de CD, halla AB : CD y CD : AB.
31. En la figura AA' // BB' // CC', si AB = 4cms y BC = 8cms, determina A'B' y B'C'.



32. Si E divide los segmentos AB y CD en partes proporcionales y AD = 18cms, CE = 15cms, AE = 12cms y EB = 28cms; calcula los demás segmentos de la figura.

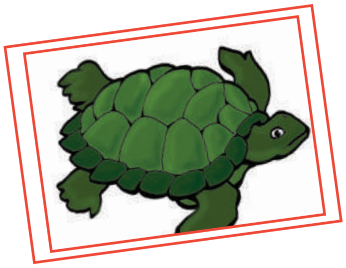


33. En el ΔABC, AD es la bisectriz del ángulo A, si AB = x - 2, Cd = x ^ BD = 5x – 8; determina los lados de los triángulos.



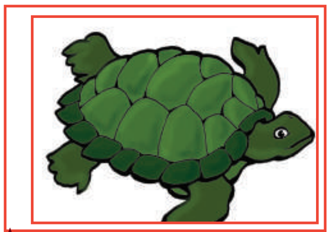
34. Los lados de un triángulo miden 5, 7 y 9 cms., respectivamente; determina si es semejante al triángulo de lados 8, 9 y 11cms., respectivamente.
35. Los lados de un triángulo rectángulo miden 5, 12 y 13 cms respectivamente; determina los lados de otro triángulo rectángulo, si su perímetro es 60 cms.

V.7 Transformaciones Geométricas.

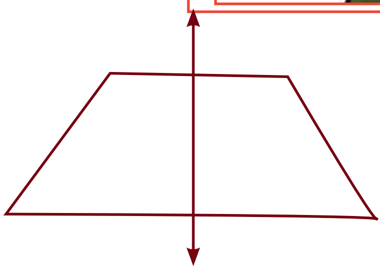


Transformaciones

Traslaciones.



Rotaciones.



Reflexiones.

Imagen de Figuras. Transformaciones.

¿Qué es una figura?

Una figura es la forma exterior de un cuerpo.

¿Qué es una imagen?

Es la representación o apariencia de una persona o cosa imitada por el dibujo.

¿Qué es una transformación?

Es el cambio operado en un objeto cualquiera. Como puedes entender, para que haya cambio es necesario tener una figura original, es decir, debes lograr una imagen de algo, por lo tanto, tienes una pre-imagen y logras una imagen.

Las figuras están formadas por puntos.

Si deseas transformarlas, debes hacerlo ***punto*** a ***punto***.

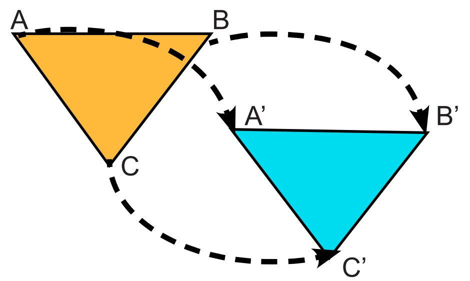
Transformación es toda correspondencia biunívoca entre puntos del plano o del espacio.

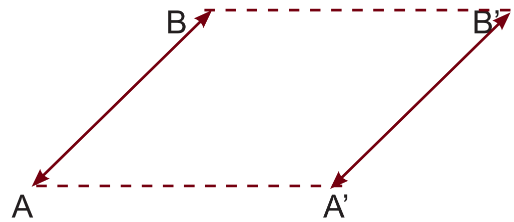
Si aplicas una transformación T a un objeto P, obtienes otro objeto I.

$T : P \rightarrow I$

Puedes transformar un punto P en otro P’ y lo expresas: $T : P \rightarrow P'$

De la misma manera la imagen de la recta AB es la recta A’B’, ya que transformas: $T.A \rightarrow A'$ ^ $T.B \rightarrow B'$

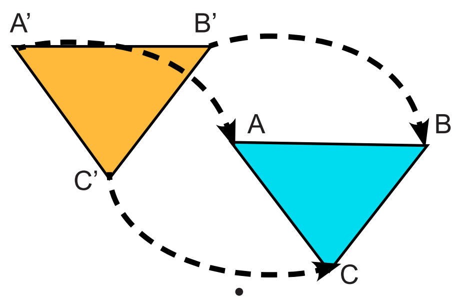




Si deseas transformar una figura en otra, debes transformarla ***punto*** a ***punto***.

$T.A \rightarrow A'$; $T.B \rightarrow B'$; $T.C \rightarrow C'$

Una transformación inversa T^{-1} va desde la imagen a la pre-imagen.



$T \rightarrow TT^{-1} = Q$

$\mathbf{T.A' \rightarrow A}$; $\mathbf{T.B' \rightarrow B}$; $\mathbf{T.C' \rightarrow C}$

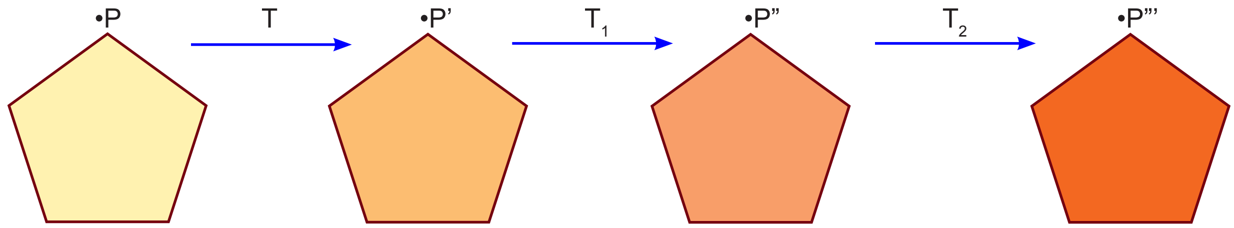
Si tienes el punto A y le aplicas la transformación T, obtienes el punto A’

$A \xrightarrow{T} A'$ si al punto A’ le aplicas una nueva transformación T_1

obtienes el punto A” ⇒ $A \xrightarrow{T} A' \xrightarrow{T_1} A''$

La aplicación de dos o más transformaciones sucesivas: $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$, es otra transformación, y constituye el ***Producto de Transformaciones.***

significa T por T_1 : $A \rightarrow A''$



El producto de una transformación T y su inversa T^{-1}, equivale a la transformación unidad.

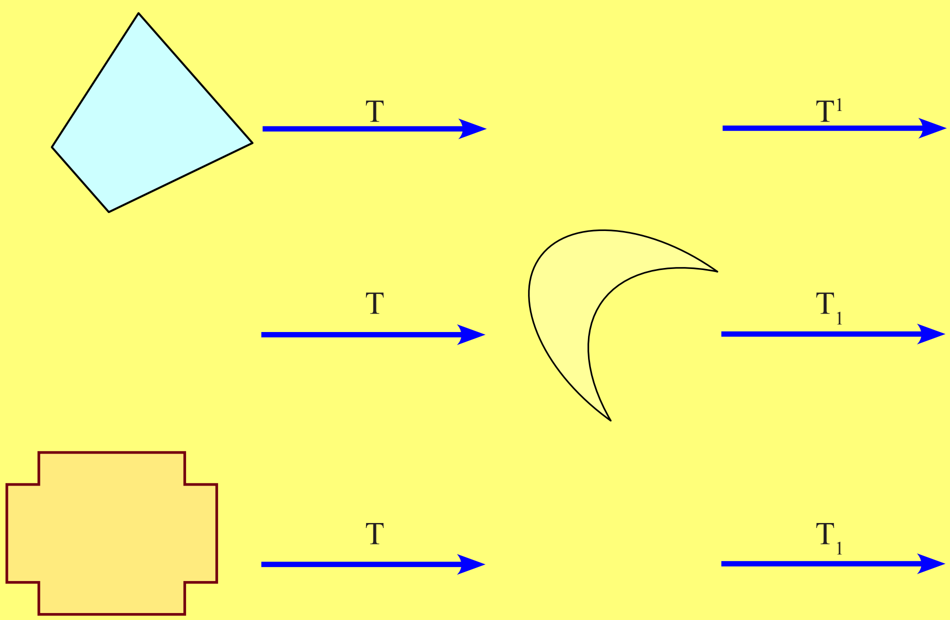
$$T * T^{-1} = T^{-1} * T = 1$$

$$1 * P \rightarrow P$$

Al aplicar la unidad sobre cualquier punto P obtienes el mismo punto P. Esta es una ***transformación identidad.***

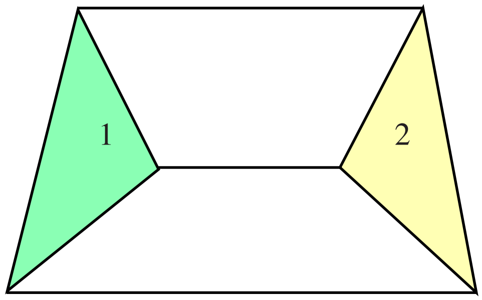
Es el momento de practicar lo aprendido

a. Al lado de cada figura realiza las transformaciones T y T_1:



Isometrías. Clasificación.

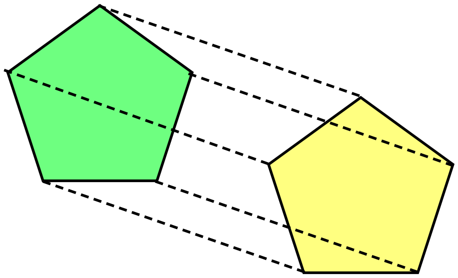
¿Qué significa isometría?



Iso significa ***igual*** y ***metría*** quiere decir ***medida,*** Entonces, isometría significa igual medida.

Las isometrías son transformaciones especiales donde la pre-imagen y su imagen son congruentes; es decir ,no se alteran ni en sus dimensiones ni en sus formas:

En la figura anterior si T es una isometría, entonces $T.\ \Delta 1 \rightarrow \Delta 2 \ \therefore\ \Delta 1 \cong \Delta 2$



Las isometrías son transformaciones de congruencias que se aplican a la figura sobre sí misma, dejando que sea invariable las distancias entre los puntos de la figura sobre la cual se aplica.

Existen propiedades que te ayudarán a comprender los procesos isométricos:

** El *producto de dos isometrías es otra isometría.*

** La *Transformación identidad es una isometría.*

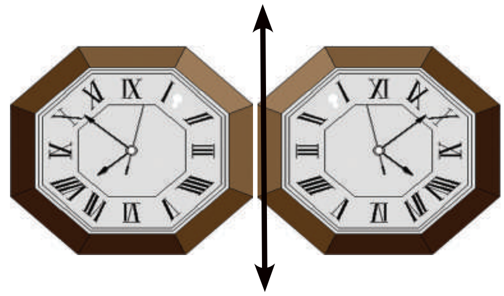
** *Si una transformación T es una isometría, entonces T^{1} es también otra isometría.*

Las Isometrías son desplazamientos rígidos que se clasifican en: ***Reflexiones, Traslaciones y Rotaciones***

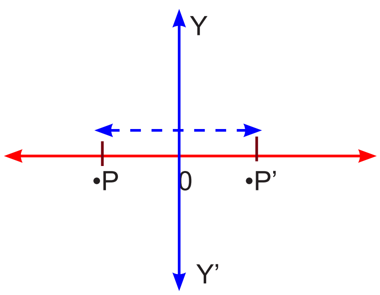
Reflexión:

¿Qué significa reflejar?

Coloca un reloj frente a un espejo, luego compara la hora que te indica el reloj con la hora que observas en el espejo.

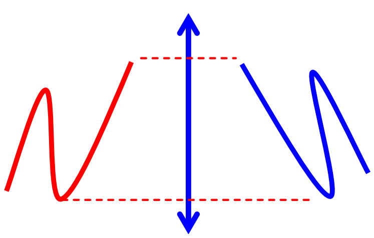


La imagen reflejada de una figura geométrica mantiene la forma y el tamaño de la figura original, pero con una posición invertida, el $\Delta 1$ y $\Delta 2$ es un ejemplo de la reflexión del $\Delta 1$ cuya imagen es el $\Delta 2$.



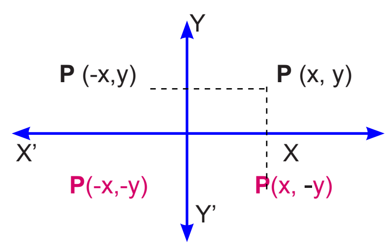
Traza una recta YY' y considera que es un **eje** de reflexión de un punto P que se refleja en dicho eje; produce la imagen P'.

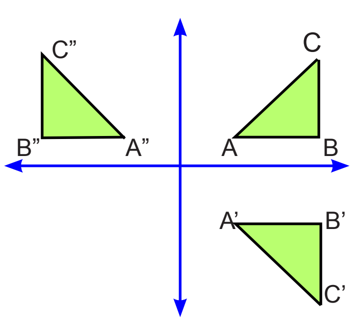
YY' es la perpendicular *mediatriz* del segmento PP' quiere decir que: $\overline{OP} = \overline{OP'}$



La reflexión de un punto, es otro punto que se encuentra a igual distancia del eje de reflexión, y la reflexión de una línea es otra línea cuyos puntos están equidistantes del eje de reflexión.

La reflexión del punto P(x,y) con respecto al eje XX', es otro punto P'(x,-y). De la misma manera, la reflexión del punto P(x,y) con respecto al eje YY' es otro punto P''(-x,y), de





La reflexión de una figura, implica que toda la figura aparece reflejada.

El ΔABC está reflejado sobre el eje XX' y produce la imagen ΔA'B'C', pero sobre el eje YY' aparece la imagen ΔA''B''C''.

Recuerda que:

1. Si el eje horizontal XX' es un eje de reflexión, entonces Rx transforma el punto P(x,y) en el punto P'(x',-y').

   Rx : (x,y) → (x, -y)

2. Cuando el eje vertical YY' es un eje de reflexión, entonces Ry transforma el Punto P(x,y) en el punto P"(-x",y")

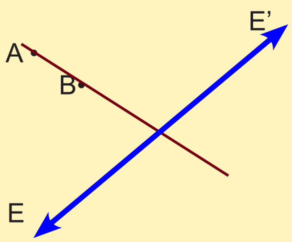
   Ry : (x,y) → (-x,y)

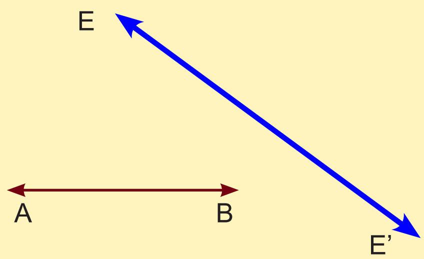
3. El producto de Rx * Ry forma la isometría central, donde un punto P(x,y) se transforma en P'(-x',-y'), lo que equivale a decir que el punto es isométrico con respecto al origen.

   Rx * Ry → Ro
   ∴
   Ro (x,y) → (-x,-y)

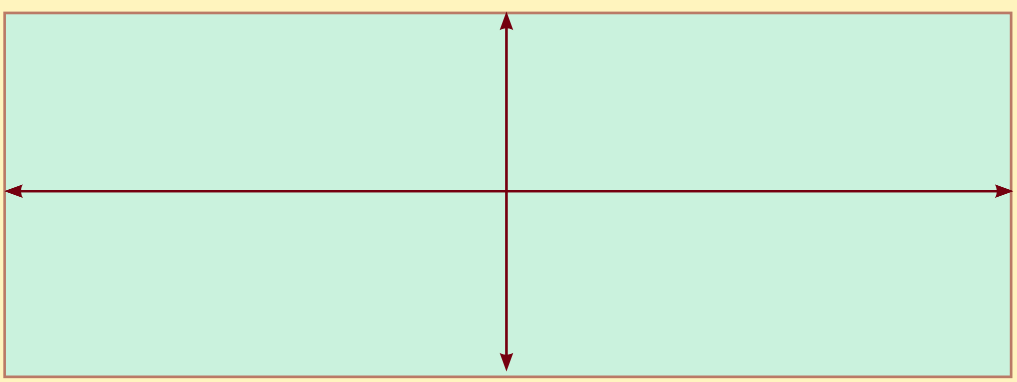
Es el momento de practicar lo aprendido

a. ***Si EE' es un eje de reflexión, encuentra las imágenes de los puntos y rectas indicados:***





b. ***Dibuja el triángulo ABC, cuyas coordenadas son: A(2,2), B(4,3) y C(3,7), y luego encuentra las imágenes sobre los ejes XX' ^ YY':***



c. *Como en la reflexión de una figura aparecen todos sus puntos reflejados, si tienes los vértices del triángulo ABC: A(3,1) , B(7,1) y C(5,4); más los vértices del triángulo GMS: G(2,2), M(4,1) y S(6,4), observa el cuadro de las reflexiones sobre los ejes y completa los que faltan:*

d. *Completar cuadro.*

Eje XX’	Eje YY’	Eje XX’	Eje YY’
R(0X) . A = A’(3,-1)	R(0Y) . A = A”(,)	R(0X) . G = G’(2,-2)	R(0Y) . G = G”(,)
R(0X) . B = B’(,)	R(0Y) . B = B” (,)	R(0X) . M = M’(,)	R(0Y) . M = M”(-4,1)
R(0X) . C = C’(,)	R(0Y) . C = A”(-5,4)	R(0X) . S = S’(,)	R(0Y) . S = S”(,)

e. *Construye dos ejes y dibuja las imágenes de los triángulos anteriores:*

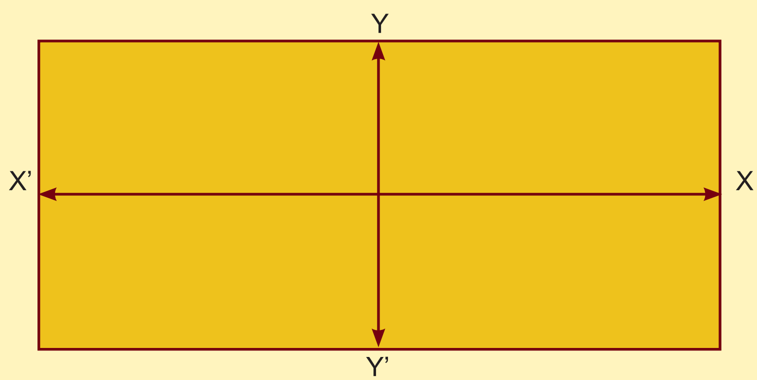
f. *Completa el siguiente cuadro, donde R(0,x) es reflexión al eje XX’ y R(0,y) es reflexión al eje YY’*

Puntos	Ejes	Imágenes
A(4,3)	R(0,x)	
R(0,y)	B(-2,1)	
C(0,-3)	R(0,x)	

Puntos	Ejes	Imágenes
R(0,y)	D”(-2,-3)	
E(5,-4)	R(0,x)	
F(1,3)	R(0,y)	

g. *Determina la reflexión en el plano de coordenada de los siguientes segmentos con respecto a los ejes: XX’ ^ YY’*

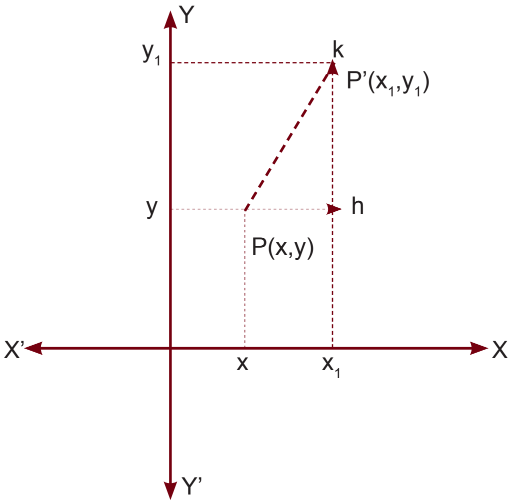
Segmento	Origen	Extremo
AB	A(2,3	B(3,5)
CD	C(-2,4)	D(-5,2)
EF	E(-3,-4)	F(2,-1)
CH	G(4,-2)	H(5,-6)



Traslación.

¿Qué entiendes por trasladar? Es movilizar un objeto de un lugar a otro, sin que pierda su naturaleza, ni orientación.

Si tienes un punto, una recta o una figura, puedes utilizar el plano de coordenadas para la traslación, así:



Si mueves el punto P(**x,y**) hasta $P'(x_1,y_1)$, de manera que **x** se desplaza **h** unidades hacia la derecha, mientras **y** se mueve **k** unidades hacia arriba, entonces significa que:

$$x_1 = x + h \quad \wedge \quad \mathbf{y_1} = y + k$$

de la misma manera, si el movimiento es hacia la izquierda y hacia abajo, puedes decir que:

$$x = x_1 - h \quad \wedge \quad \mathbf{y} = y_1 - k$$

o comprobar que:

$$\mathbf{h} = x_1 - x \quad \wedge \quad \mathbf{k} = y_1 - y$$

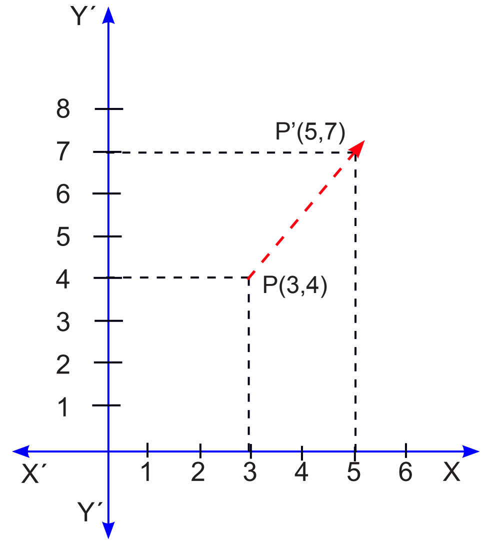
Si desplazas horizontalmente h unidades hacia la derecha es porque $h > 0$, pero si $h < 0$ entonces h se mueve hacia la izquierda. De la misma forma si $k > 0$ es porque se mueve hacia arriba y si k se desplaza hacia abajo entonces es porque $k < 0$.

Significa que el movimiento horizontal se denota por h y el vertical por k.

.

Ejemplos:

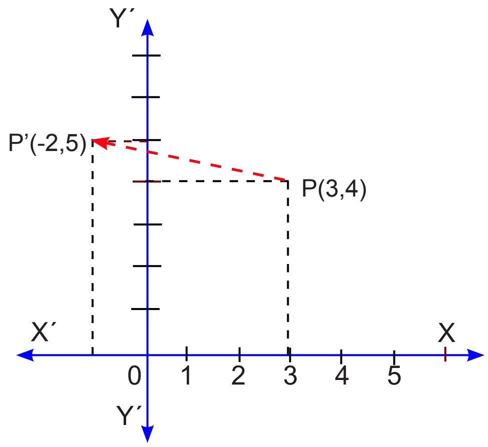
1. En un sistema de ejes de coordenadas, donde se encuentra el punto P(3,4), este se desplaza h = 2 y k = 3 ¿Cuáles serán las coordenadas del punto P' después del desplazamiento?



Observa que x se movió 2 unidades horizontalmente y hacia la derecha, lo que significa que:
$x_1 = x + h = 3 + 2 = 5$,

pero y se desplazó 3 unidades hacia arriba, es decir:
$y_1 = y + k = 4 + 3 = 7$ el nuevo punto es $P'(x_1,y_1) = P'(5,7)$

2. Si el punto P(3,4) lo mueves hasta el punto P'(-2,5) encuentras los valores de h y de k.



Solución:

Como $h = x_1 - x$ ^ $k = y_1 - y$, entonces:

$h = -2 - 3 = -5$ ^ $k = 5 - 4 = 1$

3. Un punto se desplazó h = 2 y k = -4 y se encuentra ahora en P'(-3,2). Encuentra las coordenadas originales del punto P.

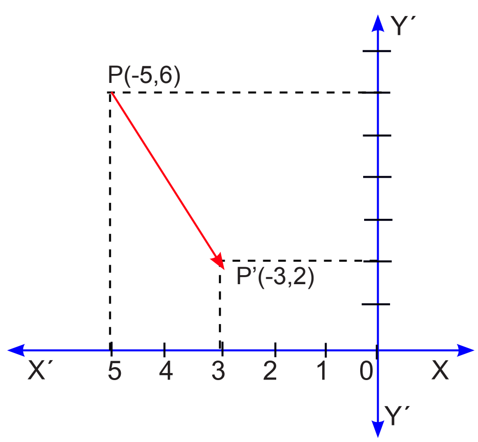
Solución:

El punto P se encuentra en:

$x = x_1 - h = -3 - 2 = -5$

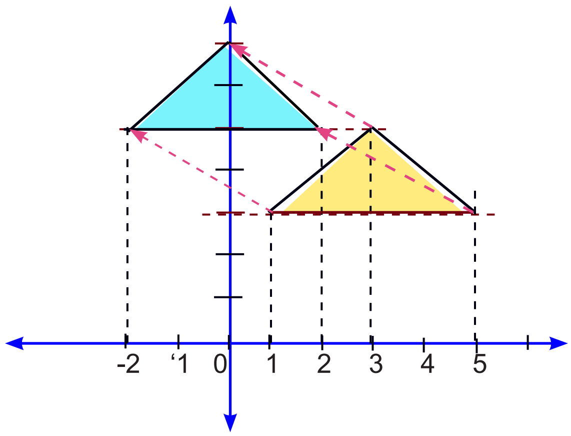
$y = y_1 - k = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6$

El punto tendrá coordenadas P(5,6)



4. Los vértices del triángulo ABC se desplazan h = -3 y k = 2, determina la nueva posición del triángulo si sus vértices son los puntos: A(1,3), B(5,3) y C(3,5).

Solución:



Los nuevos vértices son:

A'(1+(-3), 3 + 2) = A'(-2,5)

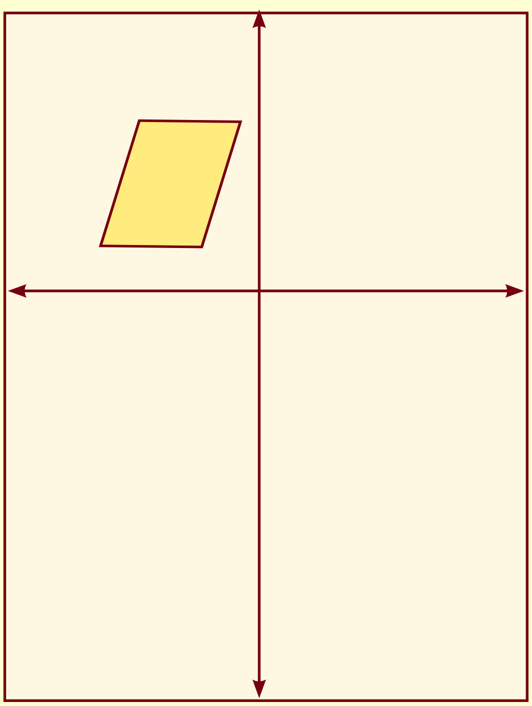
B'(5 +(-3), 3 + 2) = B'(2,5)

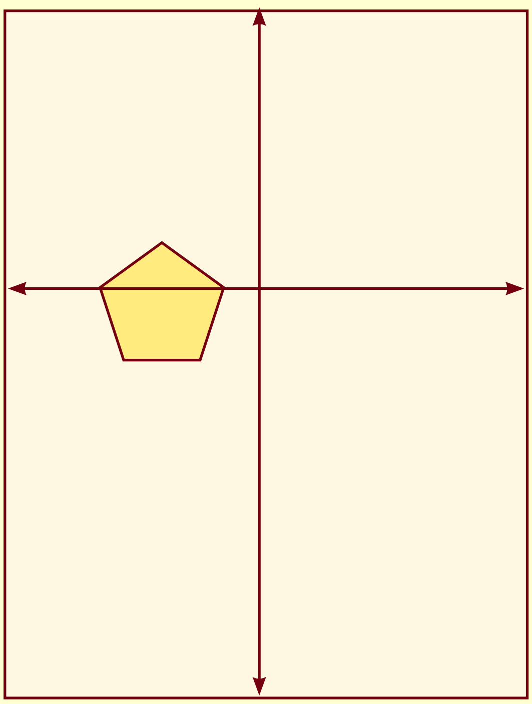
C'(3+(-3), 5 + 2) = C'(0,7)

Observa la figura y coloca los vértices de la pre-imagen y de la imagen.

Es el momento de practicar lo aprendido

a. Observa las figuras de los planos M y N, crea imágenes de traslación para: h = -5 y k = -3





b. ***La imagen del triángulo ABC es el triángulo A'B'C', cuyos vértices son: A'(2,0), B'(8,0) y C'(5,7), si el desplazamiento fue: h = -3 y k = 2, encuentra las coordenada del △ABC.***

c. ***Los vértices de un cuadrilátero son: A(1,2); B(5,2); C(3,6)y D(7,6), determina su imagen si conoces que el desplazamiento horizontal es 2 unidades y su movimiento vertical es de 3 unidades.***

d. ***La imagen del cuadrilátero cuyos vértices son A(1,3); B(7,3); C(4,7) y D(8,7) es el cuadrilátero cuyos vértices son: A'(4,1) ; B'(10,1) ; C'(7,5) y D'(11,5), dibújalos y determina los desplazamientos h y k.***

Producto de traslaciones.

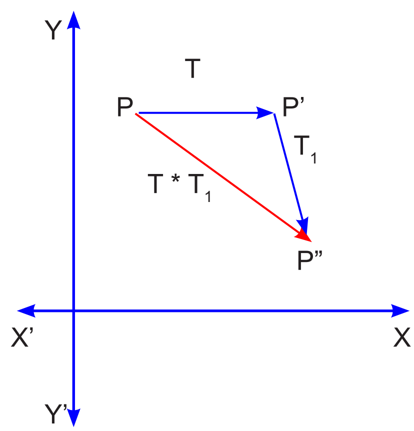
Si tienes una traslación T que transforma un punto P en otro punto P' de manera que T (P) → P', y existe una segunda traslación T_1 que transforma al punto P' en el punto P" de modo que T_1(P') → P". Entonces el resultado de esas dos traslaciones sucesivas es un ***Producto de Traslaciones***, lo cual se indica por T * T_1 y establece la correspondencia que existe entre P y P".

En la figura, observa que:

a. La traslación T está definida por el vector $\overrightarrow{PP'}$.

b. El vector $\overrightarrow{P'P''}$ define la traslación T_1 .

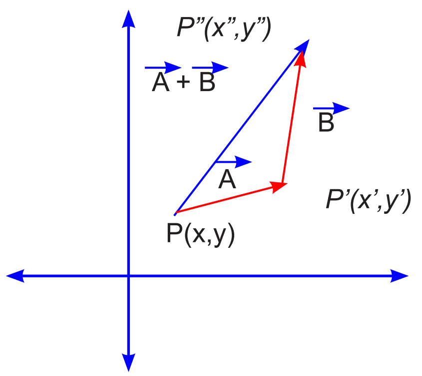
c. El producto de las traslaciones T * T_1 está definido por la suma de los vectores $\overrightarrow{PP'}$ ^ $\overrightarrow{P'P''}$:



$$\boxed{T * T_1 = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{PP''}}$$

Anteriormente pudiste trabajar con los vectores, si tienes que sumar el vector A(h_1,k_1) con el vector B (h_2,k_2), obtienes el vector:

$$\boxed{\overrightarrow{A}(h_1,k_1)+\overrightarrow{B}(h_2,k_2) = \overrightarrow{R}(h_1 + h_2, k_1 + k_2)}$$



Si P(x,y) es un punto del plano, y quieres aplicarle dos translaciones A (h_1,k_1) y B (h_2,k_2), obtienes la traslación:

$$\vec{A} * \vec{B} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{R}(h_1 + h_2, k_1 + k_2)$$

Ejemplo:

Al punto P(3,4) aplicarle el producto de traslaciones $\vec{A} * \vec{B}$ donde A (2,4) y B (3,5).

Solución:

Como se trata de aplicar el producto de traslaciones $\vec{A} * \vec{B}$ al punto P(3,4), entonces tienes que aplicar B (3,5) a P(3,4), así:

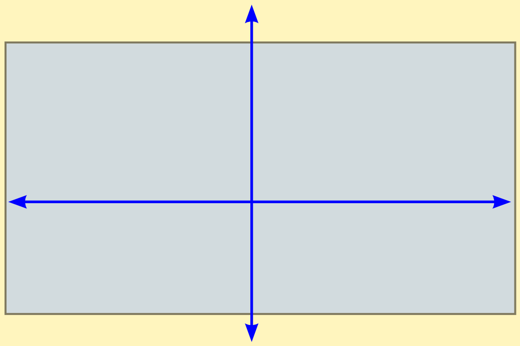
B (3,5) . [P(3,4)] = P'(3 + 3, 5 + 4) = P'(6,9) ahora aplicas:
A(2,4) al punto P'(6,9) y obtienes:

A(2,4) . [$\vec{P}$'(6,9)] = $\vec{P}$''(2+6,4+9) = P''(8,13) entonces: **A * B [P] = P''(8,13)**

Es el momento de practicar lo aprendido:

1. Aplicas al punto P(2,5) el producto de traslaciones A * B, sabiendo que:

a. A (3,2) * B(2,1)
b. A (2,2) * B(4,3)
c. A(1,3) * B(2,-1)
d. A(0,3) * B(-1,3)
e. A(2,3) * B(-2,1)



Rotación.

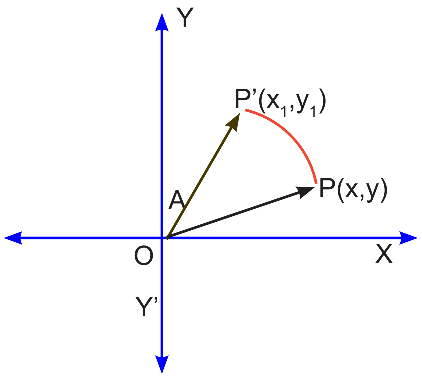
¿Qué significa rotación?

Si buscas la palabra rotación en el diccionario encuentras: ***"Acción y efecto de rodar"*** y ¿qué quiere decir rodar? ***"Dar vueltas un cuerpo alrededor de un eje"***.

¿Qué da vuelta alrededor de un eje?

Las manecillas de un reloj se mueven alrededor de un punto fijo, que es el ***centro de rotación*** y según se van moviendo forman ***diversos ángulos de rotación***.

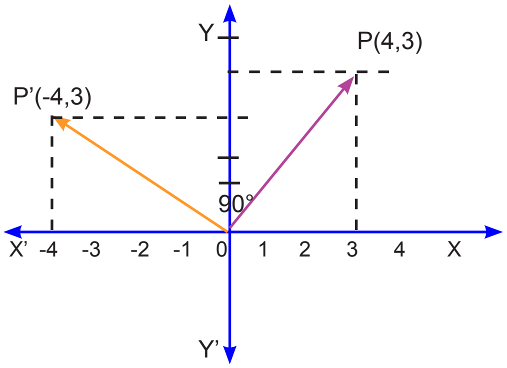
Las hélices de un abanico giran alrededor de un eje, que es su centro de rotación y generan ángulos de rotación.



Una figura geométrica puede girar sobre un eje y transformarse, según describe un ángulo de rotación.

Observa la figura, la rotación del punto P(x,y) se produce cuando con una distancia OP, haces girar a P apoyando en el centro 0 y describiendo el ángulo A hasta llegar al punto P'(x_1,y_1)

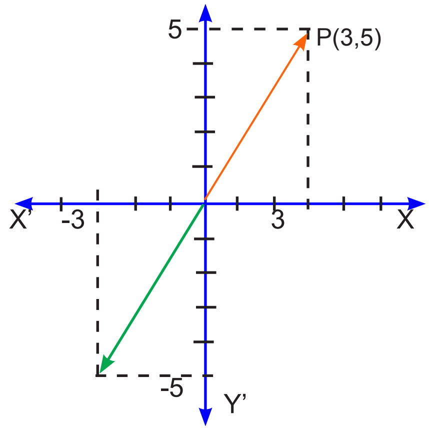
Tienes el punto P(3,4) y lo haces girar 90°, obtienes el punto P'(-4,3). Debes recordar que:



x_1 = x cos A - y sen A
x_1 = 3 Cos 90° - 4 Sen 90°
x_1 = 3 (0) – 4 (1) = -4

y_1 = ***y cos A + x sen A***
y_1 = ***4 cos 90° + 3 sen 90°*** = 4(0) + 3(1) = 3

Si ahora al punto P(3,5) lo haces girar 180°se transforma en el punto P'(-3,-5) porque la P(3,5) coordenada horizontal de la imagen siempre será:



$x_1 = x \text{ Cos } A - y \text{ Sen } A$,

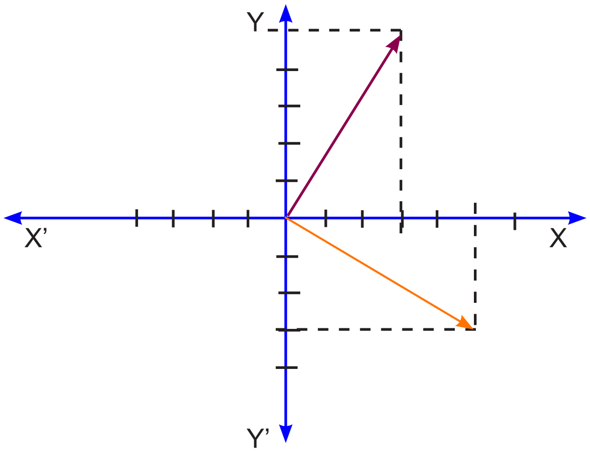
x_1 = 3 Cos 180° - 5 Sen 180° y como Cos 180° = -1

y sen 180° = 0, entonces: x' = 3(-1) – 5(0) = -3

mientras que la coordenada vertical será:

$y_1 = y \text{ Cos } A + x \text{ Sen } A$

y_1 = 5 Cos 180° + 3 Sen 180° = 5(-1) + 3(0) = -5 la imagen del punto P(3,5) con un giro de 180° es P'(-3,-5)



Si el giro es de 270°, entonces la imagen de P(3,5) es P'(5,-3)

porque: A = 270° y

$x_1 = x \text{ Cos } A - y \text{ Sen } A$

x_1 = 3 Cos 270° - 5 Sen 270°

y como:

Cos 270° = 0 y Sen 270° = -1

entonces: x_1 = 3(0) – 5(-1) = 5 de la misma manera: $y_1 = y \text{ Cos } A + x \text{ Sen } A$
y_1 = 5 Cos 270° + 3 Sen 270° = 5(0) + 3(-1) = -3

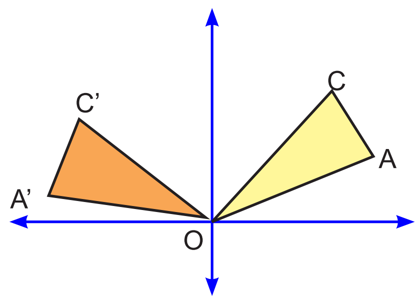
La imagen de P(3,5) con una rotación de 270° estará en P'(5,-3)

Recuerda que:
la imagen de un punto P(x,y) con un giro A, tiene como coordenadas el punto P'(x_1,y_1), donde:

$x_1 = x \text{ Cos } A - y \text{ Sen } A \quad \wedge \quad y_1 = y \text{ Cos } A + x \text{ Sen } A$

Si un punto Q(a,b) lo rotas 90° obtienes una imagen Q'($-b,a$), si la rotación es de 180° la imagen es Q'($-a,-b$) y si es de 270° su imagen es Q'($b,-a$)

Puedes rotar un triángulo A0C y llevarlo a la posición A'0C', donde 0 es el ***Centro de Rotación*** y β es su ***ángulo de rotación.***



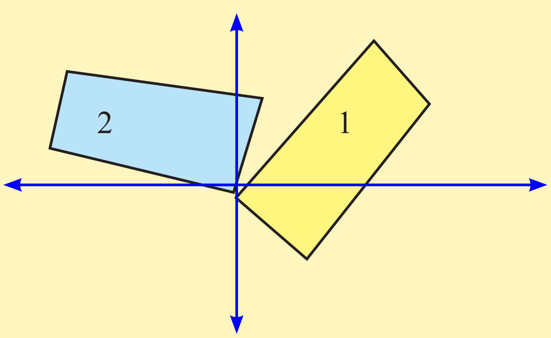
A toda figura a la que se le aplica una rotación, siempre tendrá una imagen homóloga y congruente.

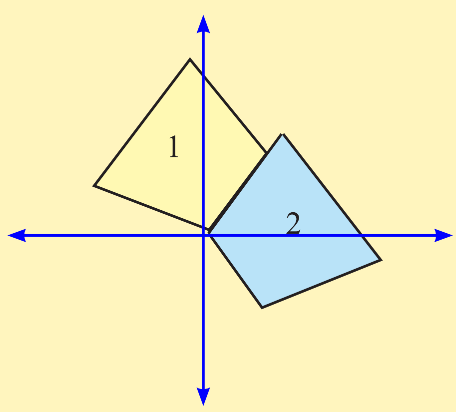
Para rotar una figura, puedes hacerlo punto a punto si conoces sus coordenadas, aunque también puedes rotar lado con lado.

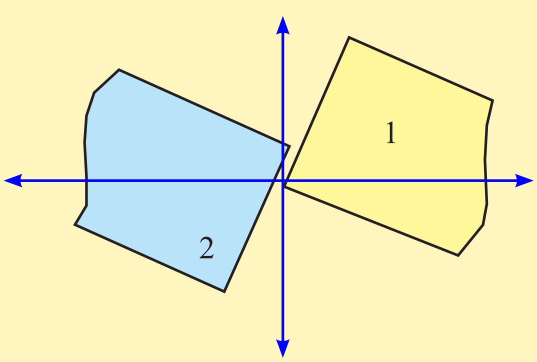
La rotación que se hace en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj genera ángulos positivos, aunque si giras en el sentido de las manecillas del reloj estarás rotando en sentido negativo.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. En las siguientes figuras la imagen es la señalada con 2. Con un transportador determina el ángulo de rotación correspondiente a cada una de ellas.





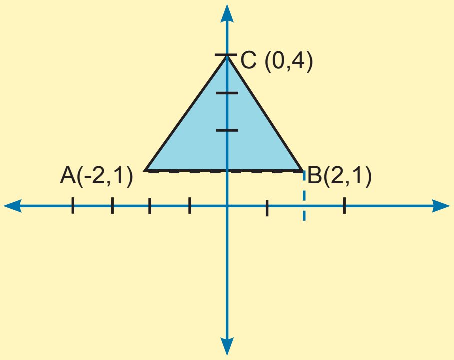


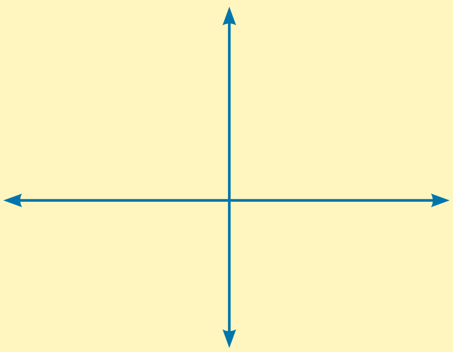
2. Completa el siguiente cuadro, sabiendo que: $x_1 = x \cos A - y \operatorname{Sen} A \wedge y_1 = y \cos A + x \operatorname{Sen} A$

(x,y)	Angulo	(x_1,y_1)	(x,y)	Angulo	(x_1,y_1)
(3,2)	45°		(-5,3)	135°	
(-4,-3)	30°		(2,-4)	120°	
(2,-5)	60°		(2.5,4)	150°	

3. Los vértices de un triángulo son: A(-2,1), B(2,1) y C(0,4), encuentra el triángulo imagen en cada uno de los siguientes casos:

1. Si el punto A(-2,1) hace una rotación de 30°.





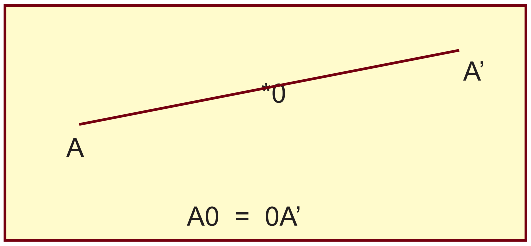
Recuerda que:
$x_1 = x \cos A - y \operatorname{Sen} A \wedge y_1 = y \cos A + x \operatorname{Sen} A$ y que cuando se hace la rotación de un vértice los otros vértices hacen la misma rotación.

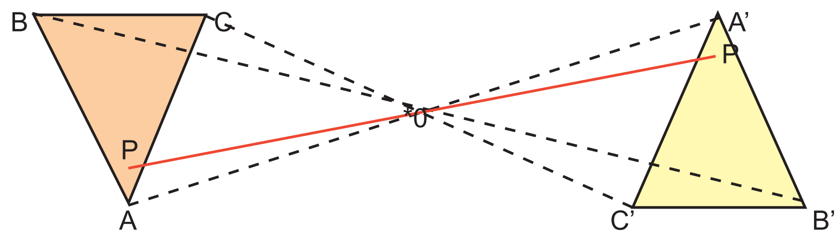
2. Si el punto B(2,1) hace una rotación de 90°
3. Si el punto C(0,4) rota 45°
4. Si el lado AB hace una rotación de 60°
5. Si el triángulo ABC hace una rotación de 120°, con centro de rotación en el vértice A.
6. Usa tu imaginación y crea un ejemplo con datos semejantes a los utilizados anteriormente.

Simetría.

Simetría con respecto a un centro.

Si tienes un punto 0 y otro punto A, y le aplicas una rotación con centro en 0 y ángulo de 180°, obtienes el punto A', entonces puedes decir que A y A' son dos puntos simétricos con respecto al punto 0.
El punto 0 es el centro de simetría y la simetría con respecto a un punto es una simetría central. Si haces un giro de 180° al Δ ABC alrededor de un punto 0, entonces formas el Δ A'B'C'.

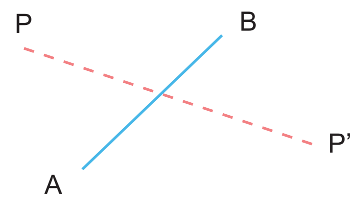




***** Toda figura tiene otra simétrica con relación a un centro de simetría.***
***** La simetría con respecto a un centro es una rotación, entonces las dos figuras geométricas con respecto a dicho centro son congruentes.***

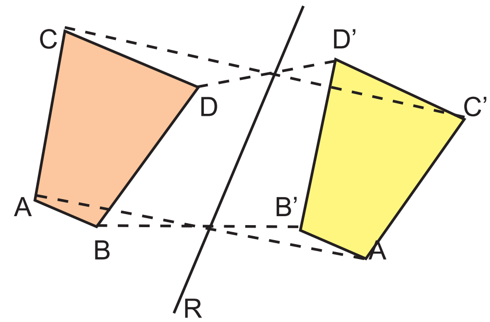
Simetría con respecto a una recta.

Si tienes la recta AB, y los puntos P ^ P' simétricos con respecto a dicha recta, entonces se cumple que: PP' Δ AB y segmento 0A = segmento 0B.

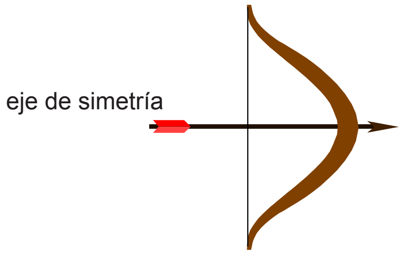


Todo punto que está sobre una recta, es simétrico de sí mismo con respecto a dicha recta.

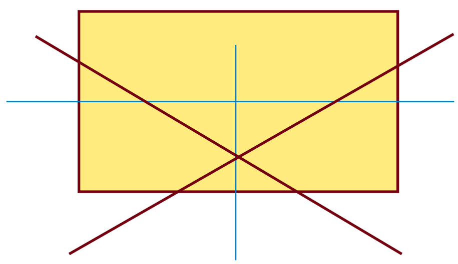
El cuadrilátero ABCD tiene un simétrico con respecto a la recta R, que es el cuadrilátero A'B'C'D'.

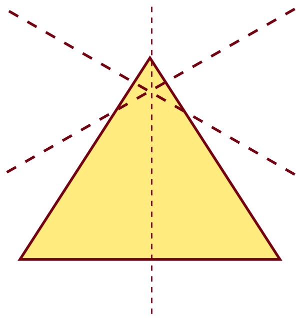


Puedes darte cuenta que cada punto del cuadrilátero ABCD tiene un simétrico con respecto a r en el cuadrilátero A'B'C'D'.

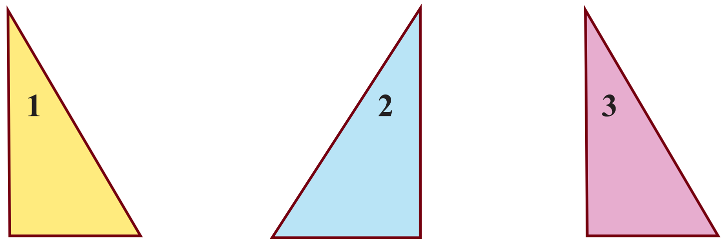


La recta R hace la función de eje de simetría, así puedes tener figuras simétricas separadas por un eje de simetría.
Las figuras pueden tener: cero, uno, dos, tres, etc., ejes de simetría





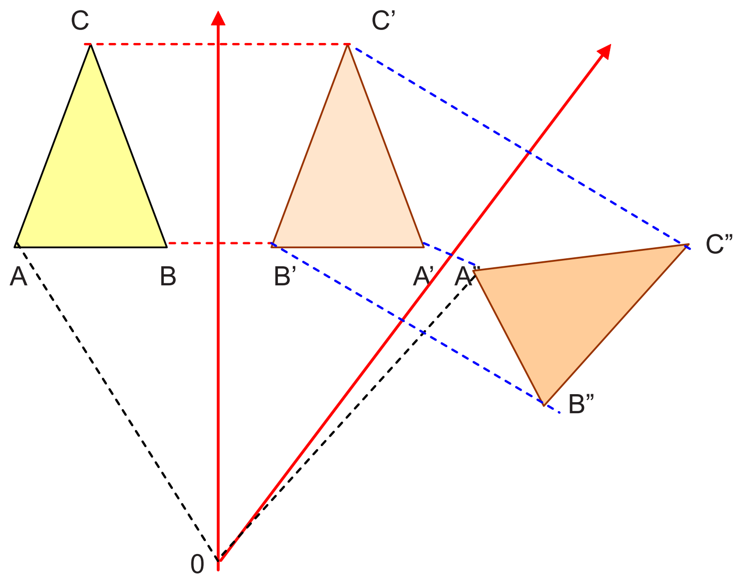
El producto de dos simetrías sucesivas a través de ejes paralelos es una traslación.



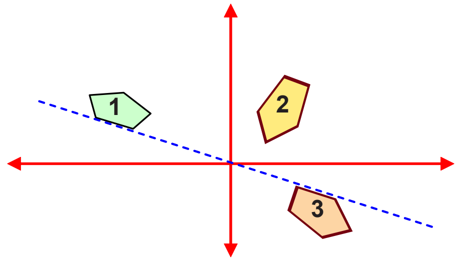
Si R y R' son dos rectas paralelas y el $\Delta 1$, entonces su simétrico con respecto a R es el $\Delta 2$, pero el simétrico del $\Delta 2$ con respecto al eje R' es el $\Delta 3$. Puedes comprobar que si pasas del $\Delta 1$ al $\Delta 3$ has realizado una traslación.

Dos simetrías sucesivas constituyen un producto de simetría, y como dos reflexiones sucesivas a través de ejes paralelos equivalen a una traslación, entonces un producto de simetría equivale a una traslación.

Si el triángulo ABC tiene un simétrico Δ A'B'C' con respecto al eje R, y aparece otro triángulo A"B"C" que es simétrico al Δ A'B'C' respecto al eje R' que se intercepta con el eje R, entonces Δ A"B"C" es la rotación del ΔABC, con centro en 0 y ángulo A0A".



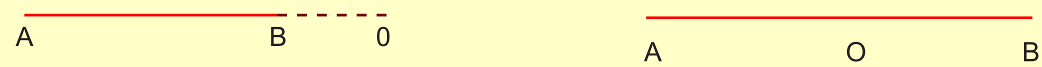
Dos simetrías con ejes no paralelos, forman dos simetrías axiales, que equivalen a reflexiones sucesivas, y forman una rotación que tiene por centro de rotación la intersección de los dos ejes.



El producto de dos simetrías con ejes perpendiculares equivale a una rotación de 180° siendo el centro de giro la intersección de los dos ejes.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. ***Construye un triángulo simétrico al triángulo ABC, si el centro de simetría es el vértice C***
2. ***Si ABCD es un rombo, construye un simétrico que esté a 2 unidades del vértice D.***
3. ***La recta R corta dos lados de un triángulo y su simétrico. Dibújalos.***
4. ***Construye los simétricos de los segmentos AB con respecto al punto 0.***

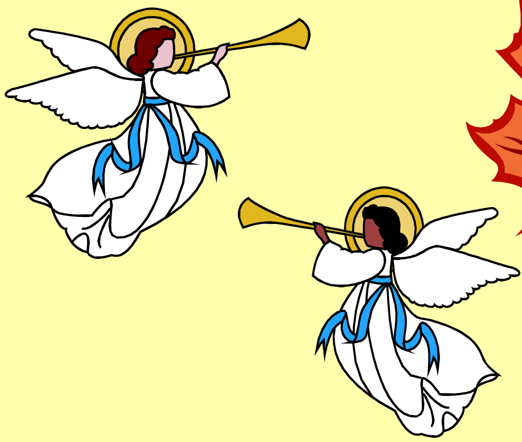


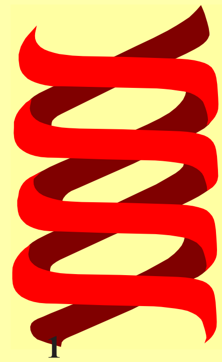
5. Dibuja el eje y el centro de simetría de un rombo.

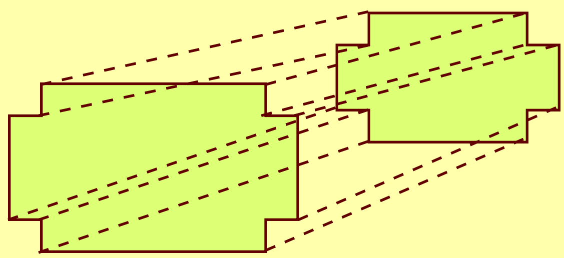
6. Dibuja un triángulo escaleno y una recta R, y construye su triángulo simétrico.

7. Dibuja el simétrico de un cuadrado ABCD, a) respecto a un vértice b) respecto a un punto exterior y c) respecto a una recta exterior.

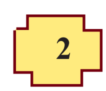
8. Traza un eje de simetría a:





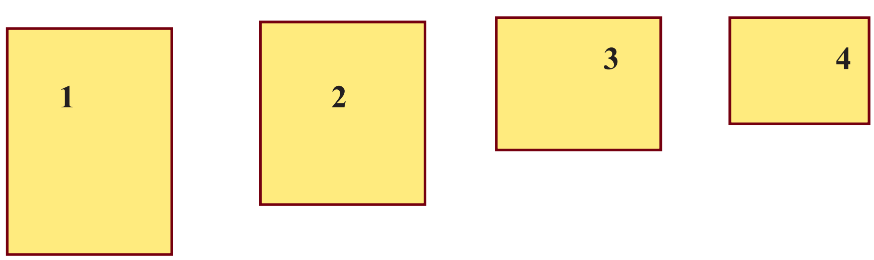


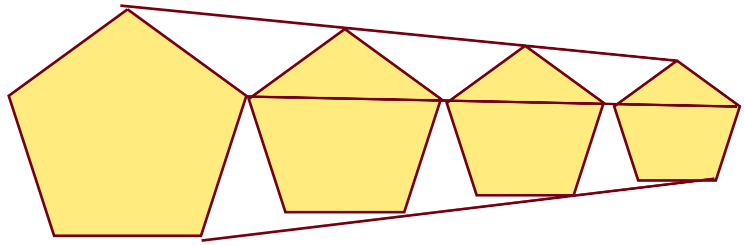
Semejante a



¿Qué son figuras semejantes?

Estas son figuras semejantes:

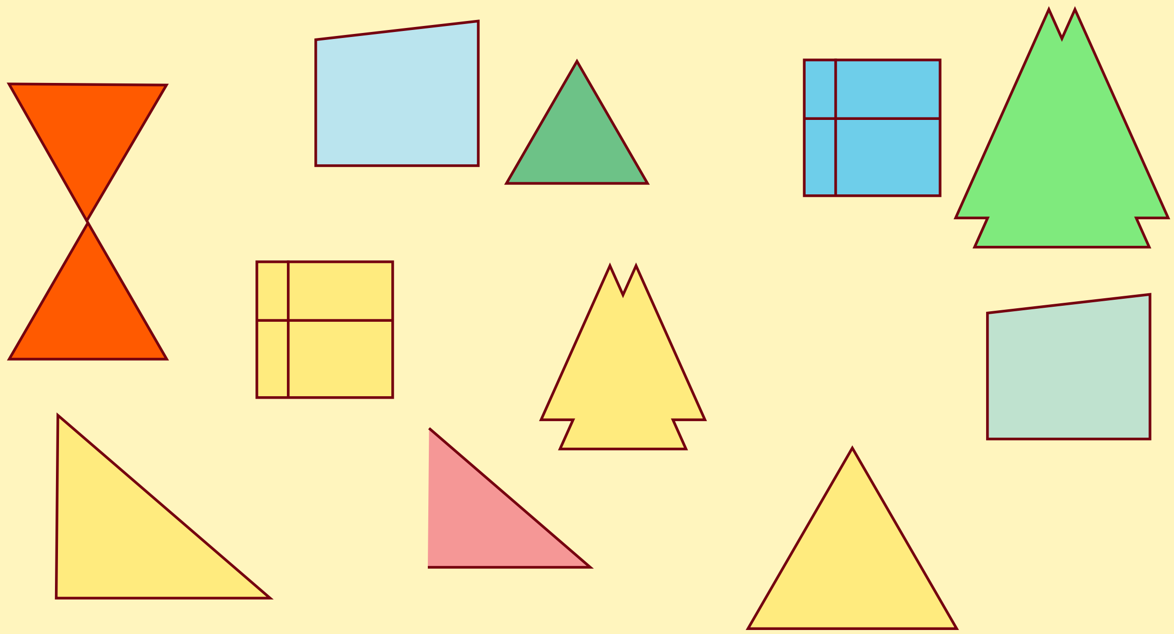




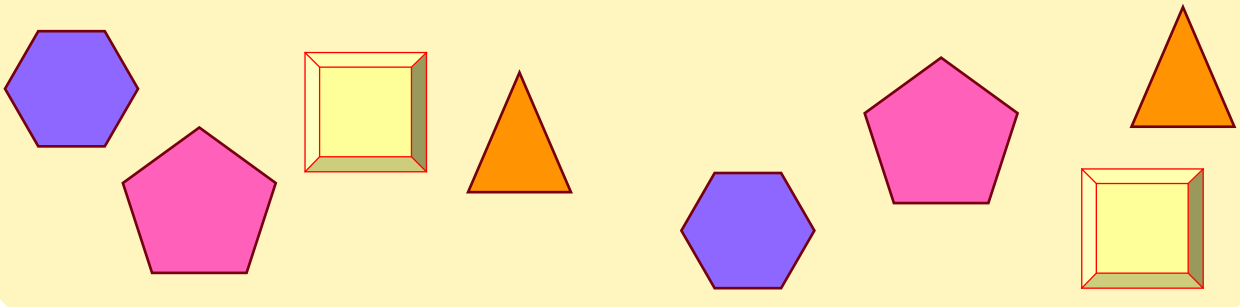
Las figuras geométricas semejantes tienen sus lados proporcionales y sus ángulos correspondientes congruentes.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Pon una misma letra a las figuras semejantes:



Todas las figuras geométricas congruentes son semejantes.



2. Completa con la(s) palabra(s) correcta(s).

1. La forma exterior de un cuerpo es su ________________________________
2. La representación de una cosa imitada por un dibujo es su ________________
3. El cambio operado en un objeto cualquiera es una _______________________
4. Las ____________ están formadas por puntos.
5. La transformación de una figura se realiza punto a __________
6. Las _________________ son transformaciones especiales.
7. En las isometrías la figura principal y su _____________ son congruentes.
8. Las isometrías son transformaciones de ____________________
9. Las figuras isométricas mantienen la misma _______________ entre sus puntos.
10. Las isometrías son desplazamientos __________________
11. Las isometrías se clasifican en: _______________________________________
12. La imagen de una figura reflejada tiene la _______________de la figura original.
13. El eje de ________________ de un punto P, produce una imagen P' equidistante.
14. La reflexión de una línea es otra línea cuyos puntos están equidistantes del _______
15. Dos rectas perpendiculares entre sí forman un _____________ de coordenadas.
16. La reflexión de un punto P(a,b) con respecto al eje XX' es ____________ y con respecto al eje YY' es ________
17. La reflexión del triángulo MNP sobre el eje XX' es ____________ y sobre el eje YY' es _____________
18. Movilizar un objeto de un lugar a otro, sin que pierda su naturaleza, ni su orientación significa _____________________.
19. Si al punto P(x,y) lo desplazas (h,k) hasta el punto P'(x1,y1), quiere decir que: x_1 =____________ ^ y_1 = ____________
20. Si h > 0 es porque el punto se desplaza hacia la _____________________ , pero si el desplazamiento es h < 0, entonces se mueve hacia la __________________.
21. Cuando k > 0 es porque el punto se desplaza hacia ___________ y si k < 0 es porque el desplazamiento es hacia _______________.
22. El desplazamiento horizontal se representa por _____ y el vertical por _____.
23. El producto de dos transformaciones se expresa por __________________.
24. El producto de dos vectores del plano equivale a la suma de sus ______________.
25. El resultado de la transformación producto depende del __________ en que se realicen las transformaciones.
26. Las manecillas de un reloj se mueven alrededor de un _______________ y forman un __________ de rotación.
27. Si a un punto P(x,y) del plano lo haces girar formando un ángulo A, entonces el punto que obtienes es P'(x_1,y_1), donde x_1 = ___________ ^ y_1 = ____________
28. Si al punto P(a,b) lo rotas 90°, obtienes una imagen __________, pero si lo rotas 180° la imagen será __________ y si la rotación es de 270° su imagen es ________
29. Dos rotaciones sucesivas a un punto forman un ________________________
30. La rotación R(0,b) * R(0,a) equivale a _______________

31. La simetría de un punto A con respecto a un centro 0, es el punto ________, que se obtiene al hacer una rotación de _______grados.
32. Toda _________________ tiene otra simétrica con relación a un Centro de Simetría.
33. La simetría con respecto a un Centro es una _______________
34. Todo punto que está sobre una recta es ________________ a sí mismo con repecto a esa recta.
35. Dos simetrías sucesivas constituyen un producto de ____________________________
36. El producto de dos simetrías con ejes perpendiculares es una __________________ de 180° con centro en la intersección de los ejes.
37. El cociente indicado de dos cantidades recibe el nombre de ____________________
38. La igualdad de dos razones es una _______________
39. Si un punto P se transforma en P’ y con un punto fijo 0 forma una razón k, entonces existe una_______________________ 0P’/0P = k.

3. Investiga: ¿Qué son los encofrados?

V.8 Cuerpos Geométricos.

Observa este gran reloj:

Es un cuerpo geométrico

Los cuerpos geométricos se clasifican en: poliedros y cuerpos redondos.

Los poliedros están formados por el conjunto
de cuerpos que tienen todas sus caras planas.

Los elementos de un poliedro son sus: caras, aristas y vértices. .

Los cuerpos redondos están formados por el conjunto de cuerpo que tienen alguna cara curva.

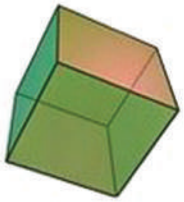
Estos son cuerpos redondos.

Los poliedros se clasifican en: regulares e irregulares.

Un poliedro es regular, cuando sus caras son polígonos regulares, e iguales entre sí. De estos poliedros solamente existen cinco: ***tetraedro***, ***exaedro***, ***octaedro***, ***dodecaedro*** e ***icosaedro***.

Estos son los poliedros regulares:

TETRAEDRO



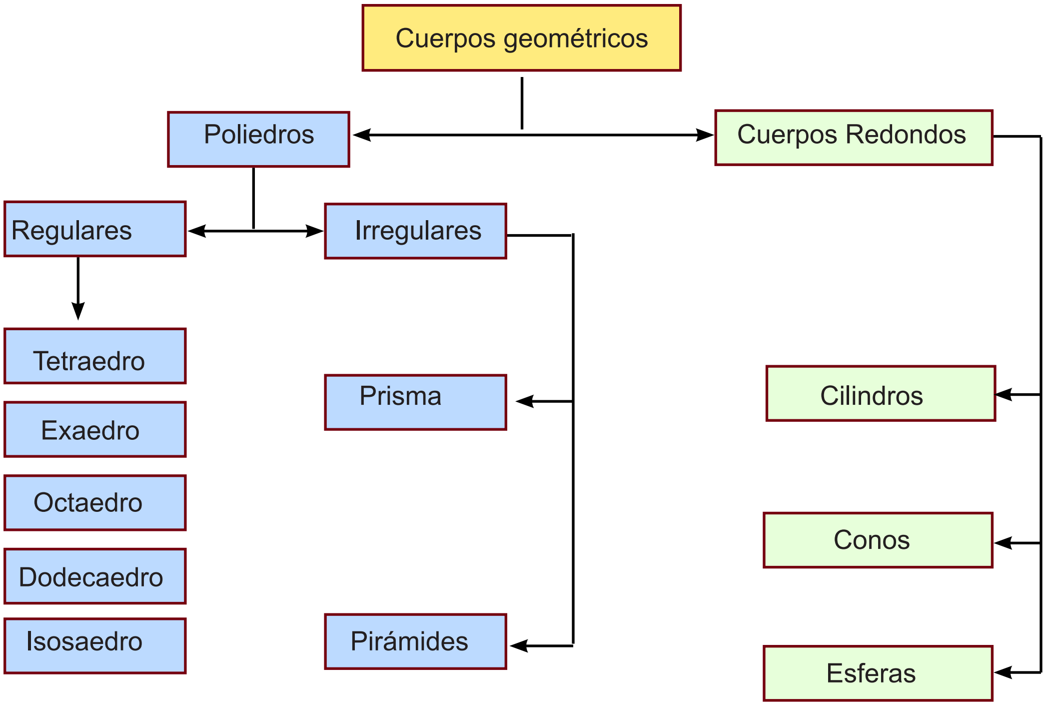
EXAEDRO

OCTAEDRO

DODECAEDRO

ICOSAEDRO

Diagrama de la clasificación de los cuerpos geométricos.



Teorema de Euler.

El número de vértice de un poliedro convexo, más el número de caras, menos el número de aristas es siempre igual a dos.

Sea v el número de vértices, c el número de caras y a el número de aristas, entonces: $v+c-a=2$

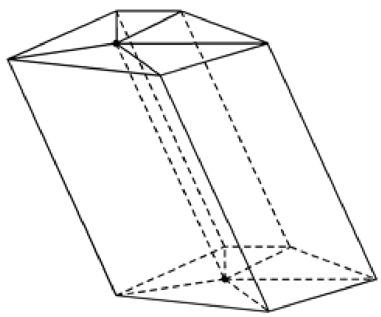
	v	c	a	$v+a-c$
Tetraedro	4	4	6	2
Exaedro	8	6	12	2
Octaedro	6	8	12	2
Dodecaedro	20	12	30	2
Icosaedro	12	20	30	2

Prisma.

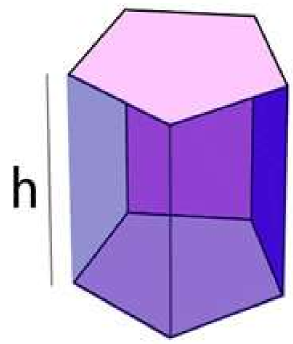
Esta figura tiene forma prismática:

Esta computadora tiene forma prismatica.

El prisma es un poliedro formado por dos planos, que le sirven de base, y sus caras laterales que son paralelogramos.



Prismas oblicuo

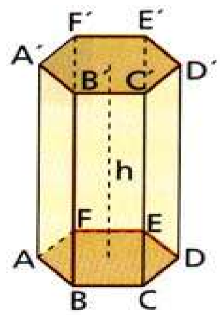


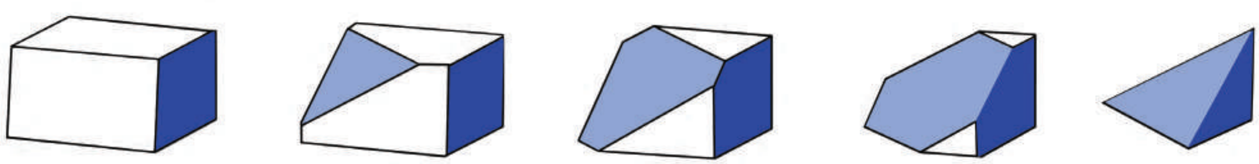
Prisma recto

El prisma es recto cuando sus caras laterales son perpendiculares a las bases, en caso contrario es oblicuo.

Un prisma es regular cuando sus bases son polígonos regulares, en caso contrario es irregular.

La altura de un prisma es el segmento de perpendicular trazado entre sus bases..



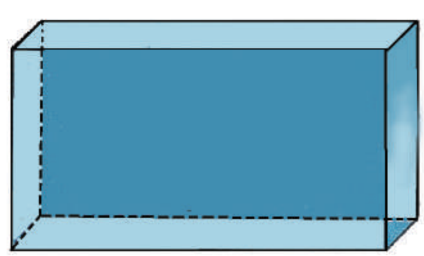


Cubo con cortes planos en varios lugares

La sección recta de un prisma es la producida por ***un*** plano perpendicular a sus aristas laterales.

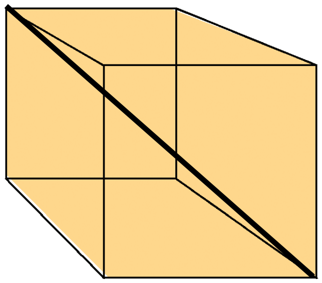
Los prismas también se clasifican por el polígono de la base en: triangular, cuadrangular, pentagonal, etc.

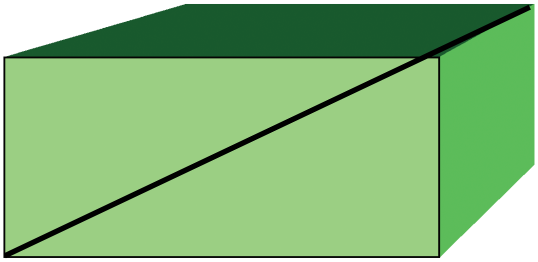
Una diagonal de un prisma es la recta que une dos vértices que no están en una misma cara.



Cuando las bases de un prisma son paralelogramos, es un ***paralelepípedo***, pero si sus bases son rectángulos se llama ***ortaedro***, del mismo modo si son rombos es un romboedro, pero si sus seis caras son cuadrados entonces es un exaedro o cubo.

Un paralelepípedo tiene cuatro diagonales que tienen un punto común.





El matemático sueco Poinsot descubrió que existen además cuatro poliedros regulares estrellados.

Estos son poliedros estrellados.

El cuadrado de una diagonal de un ortaedro, es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un vértice.

$$\boxed{d^2 = b^2 + a^2 + h^2}$$

Ejemplos:

1. Calcular la diagonal de un ortaedro, si sus aristas miden 4cms, 6cms y 7cms.

Solución:

Como $d^2 = b^2 + a^2 + h^2$ y $b = 4cms$, $a = 6cms$ y $h = 7cms$, sustituyendo se obtiene:

$d^2 = (4cms)^2 + (6cms)^2 + (7cms)^2 = 16cms^2 + 36cms^2 + 49cms^2 = 101cms^2$

$d = \sqrt{101\ cms^2} \approx 10$ cms.

1. Determina la diagonal de un ortaedro de 8cms, 9cms y 11cms., de aristas respectivamente.

Solución:

Como $d^2 = b^2 + a^2 + h^2$ y $b = 8cms$, $a = 9cms$ y $h = 11cms$, sustituyendo se obtiene:

$d^2 = (8cms)^2 + (9cms)^2 + (11cms)^2 = 64cms^2 + 81cms^2 + 121cms^2 = 266cms^2$

$d = \sqrt{266\ cms^2} \approx 16.02$cms.

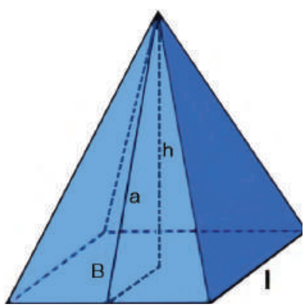
Es el momento de practicar lo aprendido

1. Si a, b y c son aristas de un ortaedro y d es la diagonal, completa el siguiente cuadro:

a	b	c	d
5	7	9	
4		7	10
	12	15	19.6215
10	9		15.625

Pirámide.

Los árboles de Navidad tienen forma piramidal.



La pirámide es un poliedro formado por un polígono como base y sus caras laterales son triángulos.

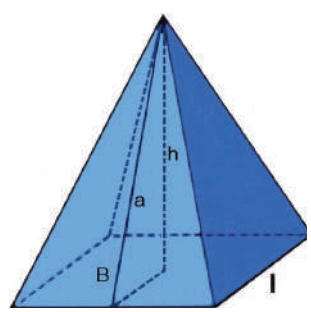
Las pirámides pueden ser regulares e irregulares, según lo sea el polígono de la base. Se clasifican en: triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales, etc.

La altura de una pirámide es la perpendicular trazada desde el vértice ***superior*** hasta el plano que le sirve de base. Cuando la pirámide es regular, la altura intercepta al polígono base en su centro.
A la altura de una cara lateral de una pirámide se le llama su apotema.

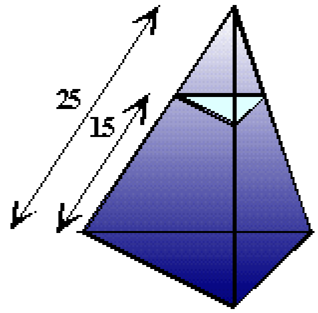
La apotema de una pirámide regular, su altura y la apotema del polígono base, forman un triángulo rectángulo.

Propiedades de una Pirámide.

1. Para toda pirámide de n lados, sus caras serán n+1
2. Las aristas y los ángulos diedros serán = 2n
3. Los vértices son iguales a n+1
4. Los ángulos triedros son iguales a n
5. Los ángulos planos son iguales a 4n.



Tronco de Pirámide.



Este es un tronco de Piramide

Tronco de pirámide es la parte de pirámide comprendida entre la base y una sección producida por un plano que corte todas las aristas.

La altura del tronco de pirámide es el segmento de perpendicular comprendido entre sus bases.
La apotema de un tronco de pirámide regular es el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados paralelos de las bases.

Para un tronco de pirámide regular, se cumple que:

1. Las caras laterales son trapecios isósceles iguales.
2. Las bases son polígonos semejantes.

Nota Histórica

LA GRAN PIRÁMIDE DE KEOPS

En Egipto se encuentra la Pirámide de Keops, llamada también, la Gran Pirámide, la Primera Maravilla del Mundo o la Pirámide Matemática. Esta pirámide, si se divide la longitud del perímetro de su base por el doble de su base escuadrada, que mide 232,805, su perímetro será 931,220. Así también, su altura mide 148,208, que por 2 será igual a 296,416, y que,si se divide 931,220 entre 296,416, se obtiene 3.14159... = π.

En esta pirámide sus diagonales prolongadas encierran el Delta del Nilo, y el meridiano que marca su cúspide, divide el Delta en dos partes iguales. También este meridiano atraviesa un máximo de continentes y un mínimo de mares y divide de Este a Oeste las tierras habitadas del globo en dos partes iguales.

Los lados de la Pirámide se orientan a los cuatro puntos cardinales. Sus sombras marcan con precisión matemática las fechas de los equinoccios de la primavera y otoño y los solsticios de invierno y verano.

La suma de las diagonales de la base, expresada en pulgadas piramidales, marca los años precisos para que los equinoccios vuelvan a idéntica posición y tengan un lugar sobre el mismo punto.

El codo sagrado o codo piramidal, que es igual a 0.635660 milímetros, aplicado en la construcción de la Pirámide, es exactamente la diezmillonésima parte del radio polar terrestre.

Al multiplicar la longitud de la antecámara real, en pulgadas piramidales (equivalen a 999 pulgadas inglesas), por 3.1416, indica la duración exacta del año en días, o sea, 365,242 días.

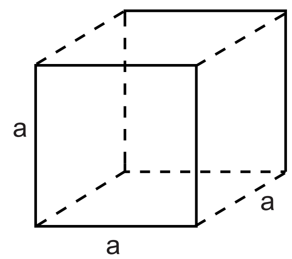
Cada lado de su base indica, en codos sagrados, la duración del año bisiesto. El producto de multiplicar el volumen por la densidad de las piedras que la forman (2.06), indica la densidad de la Tierra, o sea, 5.52. La altura de la Gran Pirámide en escala decimal, es exactamente igual a la distancia al Sol.

Superficie de los Poliedros.

El área o superficie de un tetraedro es la suma de las áreas de los 4 triángulos equiláteros que lo forman, y como el área de un triágulo equilátero equivale a ¼ √3 de su lado al cuadrado, en los poliedros los lados son aristas, entonces

$$A = 4(\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,L^2) = \sqrt{3}\,a^2$$

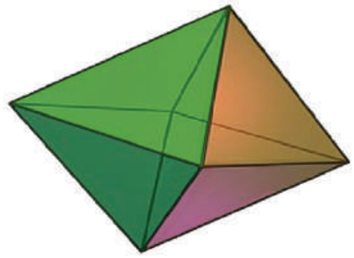
El ***área*** o superficie de un exaedro o cubo es la suma de las de las áreas de los 6 cudrados que lo forman.



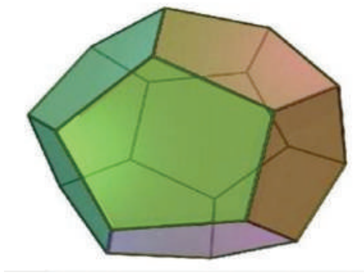
Como el área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud del lado, y el cubo tiene 6 cuadrados, entonces su área es:

$$A = 6a^2$$

La superficie de un octaedro equivale a la suma de las áreas de los 8 triángulo equiláteros que lo forman, lo que significa que:

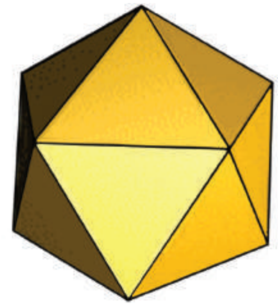


$$A = 8\,(\,(\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,L^2) = 2\sqrt{3}\,a^2$$



El dodecaedro está formado por 12 pentágonos regulares y su superfice es doce veces la superficie de un pentágono; como la superficie de un pentágono regular es : $A= \tfrac{1}{4}(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})L^2$, esto significa que el área del dodecaedro es: $A = 12\,(\tfrac{1}{4}\,(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})L^2$

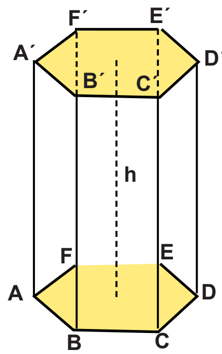
$$A = 3(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})\,a^2$$



El icosaedro está formado por 20 triángulos equiláteros y su área equivale a 20 veces la superficie de un triángulo equilátero; lo que significa que: $A = \frac{20\, a^2\sqrt{3}}{4} = 5\, a^2 \sqrt{3}$

$$\boxed{A = 5\, a^2 \sqrt{3}}$$

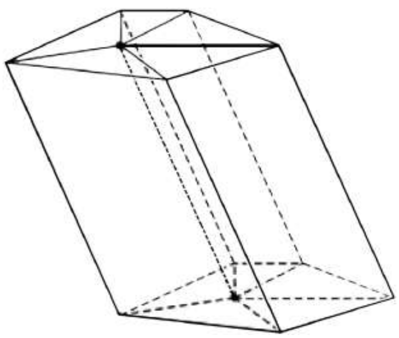
Superficie de un Prisma.



Prisma recto

La superficie de un prisma es igual a la suma de las áreas de los polígonos que lo forman.

Si se desea hallar la superficie lateral únicamente, y el prisma es recto, se multiplica el perímetro de la base por la altura.


Prisma oblicuo

$AL = P'a$

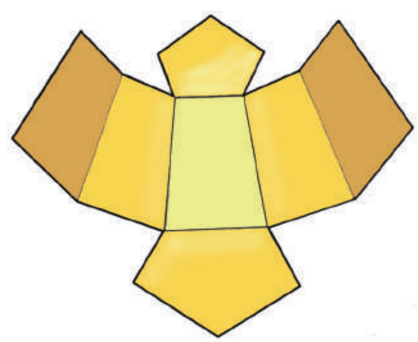
$AL = Ph$

Pero si el sistema es oblicuo, entonces se multiplica el perímetro de la sección recta por la arista.

Para hallar la superficie completa, se suma, a la superficie lateral, la superficie de las dos bases.

S= AL + 2B pero AL = Ph y B = ½Pa

S = Ph + 2(½Pa) = Ph + Pa= P(h+$\boldsymbol{a}$)



Ejemplos:

1. Calcula la superficie de un tedraedro de 2.3 cms de aristas.

Solución:

Como el área de un tetraedro es: $A = \sqrt{3}\, a^2$ y a = 2.3cms., entonces: A = 1.7321 (2.3cms)^2 = 3.984 cms^2.

2. Si la arista de un exaedro mide 8cms ¿Cuál es su área?

Solución:

Como el área del cubo o exaedeo es $A = 6a^2$, y a = 8cms, entonces $A = 6\ (8cms)^2 =$
$= 6\ (64cms^2) = 384\ cms^3$.

3. Deterrmina la superficie de un octaedro de 4 cms de arista.

Solución:

Como el volumen de un poliedro regular de 8 caras es: $A = 2\sqrt{3}\,a^2$ y a = 4 cms, entonces:
$A = 2\sqrt{3}\ (4cms)^2 = 2(1.7321)(16\ cms^2) = 55.427\ cms^2$

4. Cuántos metros cuadrados de pintura hay que aplicarle a un tanque que tiene forma de un dodecaedro, si la unión de sus caras laterales mide 4.5m.

Solución.

Como el área de un dodecaedro es: $3(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}})a^2$ y a = 4.5ms., entonces la superficie del tanque es $A= 3(\sqrt{25 + 10(2.2361})(20.25\ m^2) = 3(\sqrt{25 + 22.361})(\ 20.25m^2) = 3(\sqrt{47.361})(20.\ 25m^2)\ = 418.08\ m^2$

5. Calcula la superficie de un icosaedro de 2.5 ms de arista.

Solución:

Como el área de un poliedro regular de 20 caras es $A = 5a^2\ \sqrt{3}$ y a = 2.5 cms; entonces $A= 5(2.5cms)^2(\sqrt{3}\ ) = 137.8\ cms^2(\sqrt{3}\ ) = 238.39cms^2$.

6. Determina cuántos métros cuadrados de empañete necesita un albañil para empañetar la parte lateral de un tanque de forma prismática de 20 metros de altura, si su base es un pentágono de 18 metros de lado.

Solución:

Como el área de un prisma es AL = Ph y la base tiene 5 lados; entonces: P = 5(18 ms) =
90 cms y como la altura es de 20 metros entonces: AL = 90ms (18ms) = $1{,}620m^2$.

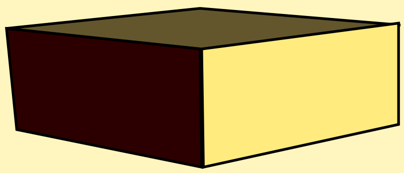
7. Calcula el área total de un prisma recto exagonal de 9 cms de lado y su altura de 20 cms.

Solución:

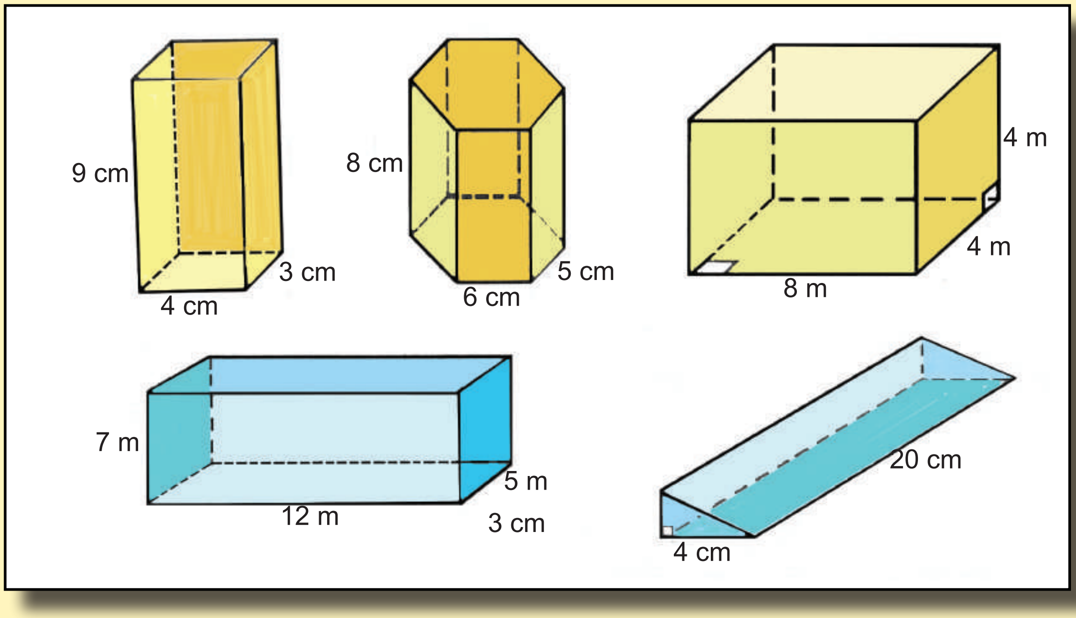
Como la superficie de un prisma es: A = P(h+a), y el perímetro del exágono regular de la base es P = 6 (9cms) = 54 cms y su apotema es $a = \frac{1}{2} L\sqrt{3} = \frac{1}{2} (9cms) \sqrt{3}$ = 4.5 cms (1.7321) = 7.794 cms, sabiendo que la altura es 20cms, entonces:

S = 54cms (20 cm + 7.794 cms) = 54cms (27.794cms) = 1,500.876 cms^2.

Es el momento de practicar lo aprendido

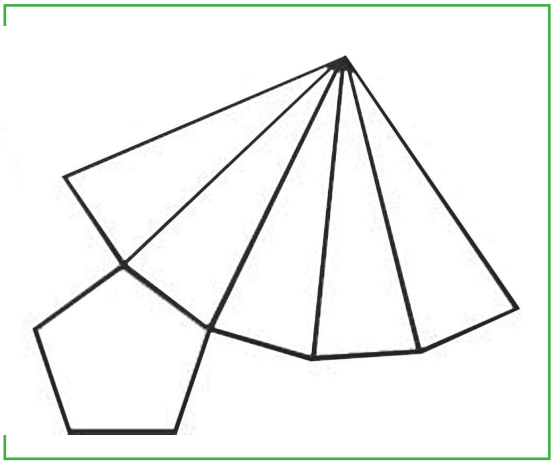


1. ***Grisel quiere saber que cantidad de cartón se lleva una caja de 24 pulgadas de largo, 15 pulgadas de ancho y 12 pulgadas de alto.***
2. ***La superficie de un tetraedro regular es de 652.28cms^2, halla la arista. –***
3. ***Cuál es la superficie de un octaedro de 5cms de arista?***
4. ***Halla la superficie de un ortoedro de 8cms de largo, 10cms, de ancho y 12cms, de altura.***
5. ***Calcula la superficie de un icosaedro de 8cms, de arista.***
6. ***Calcula la superficie de un dodecaedro, si una cara tiene 8cms de lado y 6cms; si las bases de un prisma son cuadrados de 6.25cms^2 de área, calcula la superficie del prisma si su altura es el triplo de un lado de la base.***
7. ***Calcular la superficie de cada prisma:***



8. *Calcula la superficie de un prisma exagonal regular si un lado de la base mide 8cms, y la arista lateral mide 22cms.*
9. *Determina la superficie de un prisma recto triangular si un lado de la base mide 8cms y la arista lateral mide 12cms.*
10. *Calcula el área total de un prisma recto de 20cms de altura, si sus bases son eneágonos regulares de 8cms de lados y 5cms de apotema.*
11. *Halla la superficie de un cubo de 24cms de diagonal.*
12. *Determina la altura de un prisma de 1162.56cms^2 de superficie si su base es un exágono regular de 8cms de lado.*
13. *Calcula la superficie de un prisma recto exágonal de 15cms de altura si la apotema de la base mide 7√3cms.*
14. *Determina el lado de la base de un prisma triangular de 463.36cms^2 de superficie si su altura es de 17cms.*
15. *La base de un prisma recto es un triángulo rectángulo de 25cms de hipotenusa y un cateto mide 7cms. Halla la altura del prisma si la superficie es de 1848cms^2.*

Superficie de la Pirámide.



La superficie de una pirámide es igual a la suma de las áreas de los polígonos que la forman.
Como las caras laterales de una pirámide regular son tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono base, y ya que la superficie de un triángulo es igual a ½ bh, entonces el área lateral de una pirámide regular es tantas veces nbg como lados tiene la base. Pero la base de cada triángulo es un lado del polígono y la altura es la apotema de la pirámide, entonces la superficie lateral de la pirámide es igual al semi-perímetro de la base por la apotema de la pirámide.

$$AL = \frac{1}{2}Pa'$$

Para hallar la superficie de una pirámide se suma al área lateral, y la superficie de la base.

$$S = AL + B$$

Pero AL = ½Pa’ y B = ½Pa entonces

$$S = \frac{1}{2}Pa' + \frac{1}{2}Pa = \frac{1}{2}P(a'+a)$$

Ejemplos:

1. ***El campanario de una iglesia es una pirámide recta donde cada cara tiene una altura de 20ms. Si sabes que su base tiene forma exagonal regular de 12 ms de lado, determina la superficie del campanario.***

Solución:

Como la base es un hexágono regular, hay que hallar su área, que es igual $B = 3l^2 \sqrt{3}$ y como el lado mide 12 m, entonces la base del capanario tiene: $b = 3(12m)2\sqrt{3} = 432\sqrt{3}m^2$ pero una pirámide hexagonal tiene 6 caras iguales que son triángulos equiláteros y el área de cada triángulo es: $A = \frac{1}{2}\, l^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2}\,(12m)2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}m^2$. Como la superficie de la pirámide equivale al total del Área Lateral + el Área de la Base, entonces:

$$S = AL + B = 432\sqrt{3}m^2 + 72\sqrt{3}m^2 = (432 + 72)\sqrt{3}m^2 = 504\sqrt{3}m^2$$
$$= 504(1.73)m^2 = 871.92\ m^2$$

2. ***Determina la superficie de una pirámide de 12cms de apotema, si su base es un triiángulo de 5cms, 7cms y 8cms de lados.***

Solución:

Como la superficie de una pirámide e igual $S = AL + B$ y $AL = \frac{1}{2}Pa'$, si sabes que el perímetro equivale a la suma de los lados de la base, entonces $P = 5cms + 7cms + 8cms = 20\ cms$ y como la apotema es igual a 12 cms, entonces $AL = \frac{1}{2}Pa' = \frac{1}{2}\,(20cms)\,(12\ cms) = 120\ cms^2$. Después de hallar el área lateral, hay que encontrar el área de la base que se determina con la fórmula: $B = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde $p = \frac{1}{2}P$ y a, b y c son los lados del triángulo, entonces:

$$B = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = \sqrt{10(5)(3)(2)} = \sqrt{300} = \sqrt{100(3)} = 10\sqrt{3}\ cms^2 = 10(1.73)$$
$$= 17.3\ cms^2$$

Esto significa que la superficie de la pirámide es: $120\ cms^2 + 17.3\ cms^2 = 137.3\ cms^2$

3. ***Halla el área lateral de una pirámide regular, de 12cms., de apotema, si su base es un pentágono de 8cms., de lado.***

$AL = \frac{1}{2}\,Pa'$ $P = 8cms \times 5 = 40cms$ y como $a' = 12cms$, entonces:

$AL = \frac{1}{2}\,(40cms \times 12cms) = 240cms^2$

4. ***Determina la superficie lateral de una pirámide de 15cms de apotema, si su base es un triángulo de 6,7 y 8cms de lados.***

AL = ½ P*a*' P = 6cms + 7cms + 8cms = 21cms
AL = ½ (21cms x 15cms) = 157.5c ms^2

5. ***Calcula la superficie total de una pirámide recta, de 20cms de apotema, si su base es un exágono de 8cms de lado.***

At = AL + B P = 8cms x 6 = 48cms
AL = ½ P*a*' AL = ½ 48cms x 20cms = 480 cms^2
$a = ½ L \sqrt{3} = ½ (8 \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$cms
B = ½ (4 $\sqrt{3}$cms x 48cms) = 96 $\sqrt{3}$ cms^2
At = 480 cms^2+ 96 $\sqrt{3}$ cms^2= 644.16 cms^2

Es el momento de practicar lo aprendido

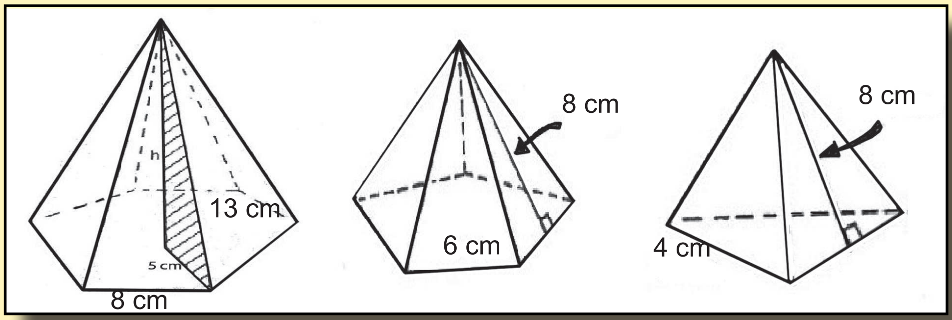
1. ***Calcula la superficie de una pirámide recta regular de 12cms de apotema si su base es un exágono de 8cms de lado.***

2. ***Halla la superficie regular de 12cms de apotema si su base es un triángulo equilátero donde el lado es 3/4 de la apotema de la pirámide.***

3. ***Determina la superficie de una pirámide regular de 12 cms de altura si su base es un cuadrado de 18cms de lado.***

4. ***Si la altura de una pirámide recta mide 41cms y la base es un exágono de 9cms de apotema calcula la superficie de la pirámide.***

5. ***Determina la superficie de estas pirámides.***



6. Calcula la apotema de una pirámide de 402.375m² de superficie si su base es un exágono de 6m de lado.

7. Determina el área total de una pirámide regular, si su base es un triángulo equilátero de 8cms de lado y la apotema de la pirámide es de 15cms.

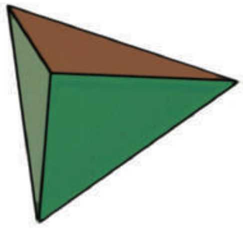
8. Halla la superficie de una pirámide de 24cms de altura si su base es un dodecágono de 5cms de lado y 7cms de apotema.

9. Calcula la apotema de una pirámide regular si su base es un octágono de 9cms de lado y 8cms de apotema y la superficie de la pirámide es de 1296cms2.

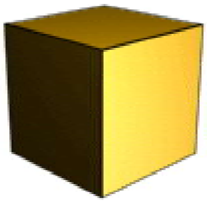
10. Si la altura de una pirámide mide 15cms y la base es un cuadrado de 16cms de lado, calcula la superficie de la pirámide.

Volumen de los poliedros.

Volumen del tetraedro, es igual al producto de la arista al cubo por √2 entre 12. Es decir:



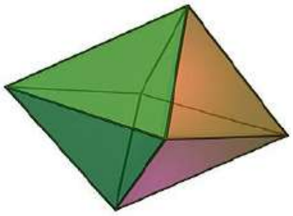
$$V = 1/12\ \sqrt{2}\ a^3$$



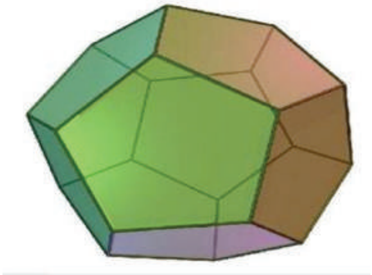
El volumen de un exaedro es igual a la longitud de un lado elevado al cubo.

$$V = a^3$$

El volumen de un octoedro es igual a un tercio de raíz de 2 por su arista al cubo.



$$V = 1/3\ \sqrt{2}\ a^3$$

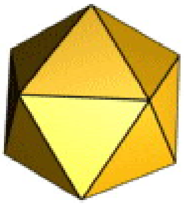


El volumen de un dodecaedro en función de su arista se determina por la fórmula.

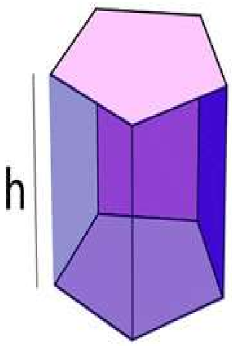
$$V = \tfrac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})\ a^3$$

El volumen de un icosaedro se determina con la fórmula:

$V = 5/12\,(3 + \sqrt{5})\, a^3$



El volumen de un ortoedro es igual al producto de sus aristas: $V = abc$



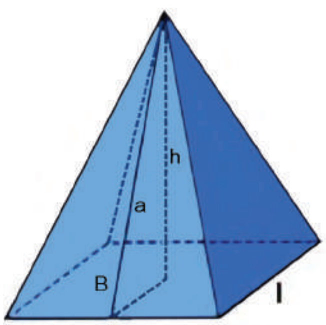
El volumen de un prisma recto es igual al área de la base por la altura.

Como el area de un polígono cualquiera equivale a ½ de su perímetro por su apotema.

Entonces V = ½Pah, si llamas B al área de la Base, entonces

$V = Bh.$

El volumen de una pirámide equivale a un tercio del área de su base por la altura. Si el área de la base de una pirámide la nombras como B, entonces su volumen es: V = 1/3 Bh.



Ejemplos:

1. Calcula el volumen de un tedraedro de 3 cms de aristas.

Solución:

Como el volumen de un tetraedro es: $V = 1/12\sqrt{2}\, a^3$ y a = 3cms., entonces:

$$V = 1/12\,\sqrt{2}\,(3\text{cms})^3 = 0.083 \times 1.4142 \times 27\text{cms}^3 = 3.169\ \text{cms}^3$$

2. Si la arista de un exaedro mide 5cms ¿Cuál es su volumen?

Solución:

Como el volumen del cubo o exaedro es $V = a^3$ y a = 5cms, entonces

$$V = (5\text{cms})^3 = 125\text{cms}^3.$$

3. Determina el volumen de un octaedro de 2.1 cms de arista.

Solución:

Como el volumen de un poliedro regular de 8 caras es: $V = 1/3 \sqrt{2}\, a^3$ y $a = 2.1$cms, entonces: $V = 1/3 \sqrt{2}\,(2.1\text{cms})^3 = 1/3 \sqrt{2}\,(9.261 \text{ cms}^3) = 4.366 \text{ cms}^3$

4. Cuántos metros cúbicos de agua coge un tanque que tiene forma de un dodecaedro, si cada unión de sus caras laterales mide 5m.

Solución.

Como el volumen de un dodecaedro es: $V = ¼\,(15 + 7\sqrt{5})\, a^3$ y a = 5ms., entonces los galones de agua que coge el tanque son: $V = 0.25\,(5 + 7(2.2361)(125 \text{ m}^3) = 0.25\,(5 + 15.653)(125 \text{ m}^3) = = 0.25\,(20.653)(125 \text{ m}^3) = 645.406$ metros cúbicos de agua.

5. Calcula el volumen de un icosaedro de 1.5 ms de arista.

Solución:

Como el volumen de un poliedro regular de 20 caras es $V = 5/12\,(3 + \sqrt{5})\, a^3$ y $a = 1.5$ m, entonces $V= 5/12\,(3 + 2.2361)(1.5\text{m})^3 = 0.4167\,(5.2361)(2.25\text{m}^3) = 4.910 \text{ m}^3$.

6. Determina cuántos métros cúbicos de agua coge un tanque de forma prismática, si su base es un exágono de 15 metros por lado y la altura del tanque mide 25 ms.

Solución:

Como el volumen de un prisma es V = Bh, donde B es el área de la base: = ½ Pa, y P significa el perímetro de la base, que como tiene 6 lados, entonces P = 6L = 6(15 m) = 90 metros, la apotema del exágono es $½ \sqrt{3}$ L; $a = ½\,(1.7321)(15\text{m}) = 12.991$ m., entonces el área de la base es: B = 90ms x 12.991 ms = 1,169.19 ms^2, donde el volumen es:

$V = 1{,}169.19\text{ms}^2 \times 25 \text{ ms} = 29{,}229.75 \text{ ms}^3$ de agua.

7. Calcula el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de 12 cms de lado y la altura de la pirámide es de 15 cms.

Solución:

Como la base es un cuadrado, entonces su área de $B = l2 = (12\text{cms})^2 = 144 \text{ cms}^2$, y como el volumen de la pirámide es un tercio del área de la base por la altura, se tiene: $V = 1/3\, Bh = 1/3\,(144\text{cms}^2)(15 \text{ cms}) = 1/3(2160 \text{ cms}^3) = 720 \text{ cms}^3$

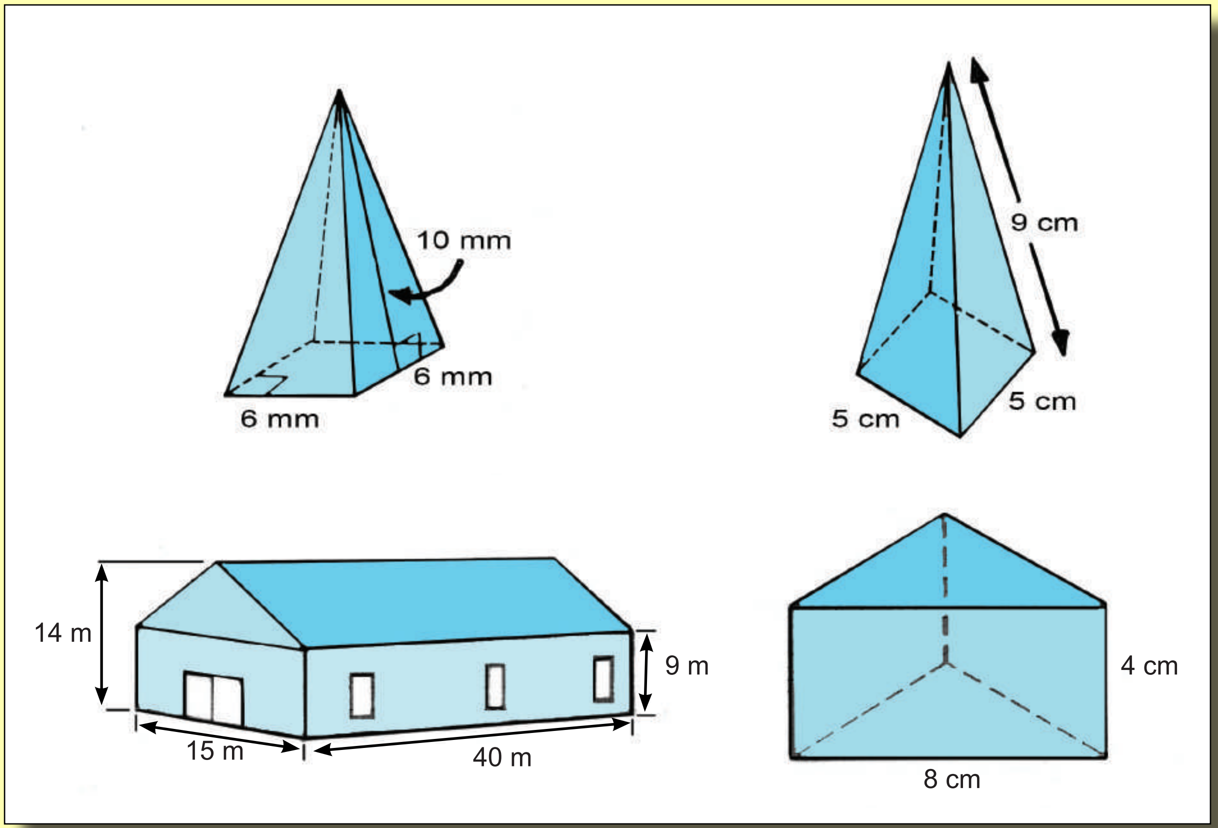
8. Determina el volumen de una pirámide de 15cms. de altura, si su base es un rombo de 8 y 6cms. respectivamente de diagonales.

V = 1/3 Bh B = ½ (8cms x 6cms) = 24 cms^2
B = 1/2 Dd V = 1/3 (24cms^2 x 15cms)= 120cms^3

Es el momento de practicar lo aprendido

1. ***Calcula la apotema de una pirámide de 402.375m² de superficie, si su base es un exágono regular de 6m de lado y si su base es un triángulo equilátero de 8cms de lado.***
2. ***Halla el volumen de un prisma recto, en que las bases son exágonos regulares de 10cms. de lado y la altura del prisma es de 30cms.***
3. ***Calcula el volumen de un prisma recto si su base es un rombo de 20cms. de lado y su diagonal menor mide 24cms. La altura del prima es de 30cms.***
4. ***Determina el volumen de un prisma recto de 12cms. de altura, si su base es un trapecio en que la base mayor mide 16cms. y la altura y la base menor son 1/3 de la base mayor.***
5. ***Halla el volumen de un prisma pentagonal de 15cms. de altura, si un lado de la base mide 3cms. y su apotema es de 5.3cms.***
6. ***Determina el volumen de un prisma recto exagonal de 15m de altura, si un lado de la base mide 5 3/4 cms.***
7. ***Calcula el volumen de una pirámide de 13cms de apotema, si su base es un exágono de 8cms, de lado.***
8. ***Determina el volumen de una pirámide de 15cms de altura, si su base es un triángulo de 7, 5 y 4cms, respectivamente de lad.***
9. ***Calcula el volumen de una pirámide de 20cms de altura, su base es un rombo de 10 y 12m de diagonales, respectivamente.***
10. ***¿Cuál será el volumen de una pirámide regular de 8 2/3dms de altura, si su base es un exágono de 4 1/2dms, de apotema?***

11. Determina el volumen de estos poliedros:



12. Se desea pintar la casa de la figura. ¿Cuántos metros cuadrados de pintura se lleva?

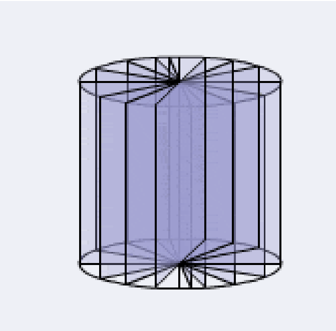
13. Calcula el volumen de un paralelepípedo rectángulo; si su diagonal mide 15cms., la altura es de 8cms. y un lado de la base es de 5cms.

14. Calcula la arista de un cubo de 90cms^3 de volumen.

15. Determina el volumen de un prisma recto exagonal de 15m de altura, si un lado de la base mide 5 3/4 cms.

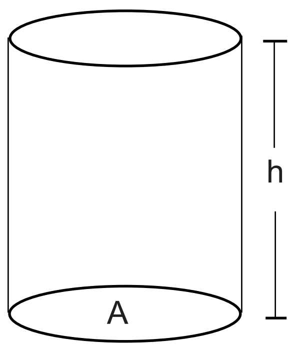
Cuerpos redondos.

Los cuerpos redondos son: cilindro, cono y esfera. El cilindro recto es también conocido como cilindro de revolución . El cilindro se forma por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados . El lado opuesto al eje de giro es la generatriz y genera la superficie lateral del cilindro, los lados perpendiculares al eje de giro generan los círculos básicos.

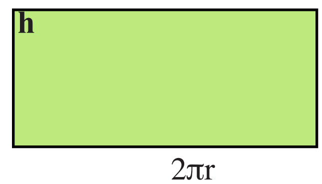


Estas latas de pintura tienen forma cilíndrica. Puedes hallarle su superficie para saber la cantidad de material que se lleva fabricarlas y también puedes determinar su volumen.para saber que cantidad de pintura contiene cada lata. La superficie de un cilindro es el área de su forma circular, sumada al área de la suma de sus bases.

La superficie cilíndrica es un rectángulo que tiene como base la longitud de la circunferencia y como altura la misma del cilindro.



Como el cilindro tiene dos círculos como bases y el área de un círculo equivale a π por radio al cuadrado, entonces la superficie del cilindro es igual al área de las dos bases más el área de la superficie cilíndrica; o sea: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.



Si ahora sacas los factores comunes obtienes una fórmula para encontrar la superficie de un cilindro, es decir:

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

$\boxed{S = 2\pi r(r + h)}$.

Ejemplos:

Si deseas armar un tanque redondo que tenga como base dos tapas de 10 pies de diámetro y una altura de 20 pies ¿Que cantidad de material necesitas?

Solución:

Como las tapas del tanque tienen diámetro de 10 pies esto indica que r = 5pies, porque el radio es la mitad del diámetro, y como h = 20pies, esto indica que si : $S = 2\pi r(r + h)$. y $\pi = 3.14$ entonces:
S = 2(3.14)(5pies)(5pies + 20pies) = 31.40 pies(25pies) = 785 pies cuadrado de material.

Si ahora deseas saber qué cantidad de pintura tiene cada una de estas latas, sabiendo que tienen 12 pulgadas de alta y 6 pulgadas de ancho.

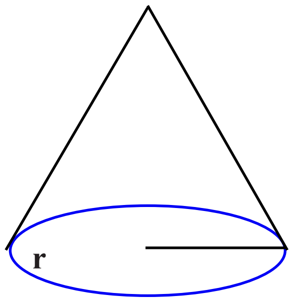
Solución:

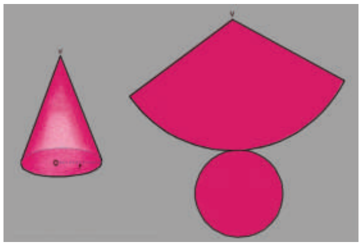
Como la base tiene 6 pulgadas de ancho, y la base es un círculo, entonces tiene 3 pulgadas de radio, y como el área del círculo es π por radio al cuadrado, entonces se tiene el área de la base es $B = \pi r^2 = 3.14$ (3 pulgadas)^2 = 3.14 x 9 pulgadas cuadradas = 28.23 pulgadas cuadrada. Pero el volumen de un cilindro equivale al área de la base por la altura, sabiendo que la altura es 12 pulgadas, entonces V = 28.23 pulgadas cuadradas x 12 pulgadas = 338.76 pulgadas cúbicas.

El Cono:

Este gorrito de cumpleaños tiene forma cónica:

El cono de revolución o simplemente cono, es la porción de espacio delimitada por una superficie de revolución cónica y un plano perpendicular al eje.

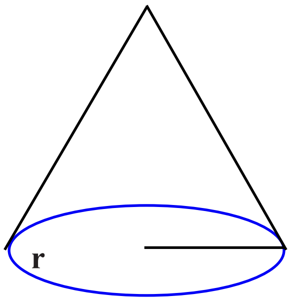




Como puedes ver, el cono tiene un círculo que le sirve de base y parte lateral, pues es una superficie conica

La superficie del cono la determinas con el área de la base sumada al área de la superficie cónica.

La base siempre es un círculo, cuya área es $B = \pi r^2$ y la superficie cónica es un triángulo circular, cuya base es la longitud de la circunferencia de la base y su altura es la generatriz que dio origen al cono.



$S = \pi r^2 + \pi r g$

Como el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura y la base es la longitud de la circuferencia, que es 2π por radio, y la altura es la generatirz g, entonces el área de la superficie cónica es:

$A = 2\pi rg \div 2 = \pi r g$ pero la superficie del cono incluye el área de su base, por tanto: y si sacas los factores comunes la puedes simplificar así:

$$\boxed{S = \pi r\,(r + g)}$$

Ejemplos:

1. Calcula la cantidad de cartulina que lleva confeccionar 300 gorritos de cumpleaños, si deben tener 12 cms de diámetro y la generatriz cónica es de 15 cms.

Solución:

Como el área cónica es: A = πrg), y el radio es ½ del diámetro, es decir r = 6cms., como g = 15cms, entonces : A = 3.14(6cms)(15cms) = 3.14 (6cms)(15cms) = 282.6 cms^2, significa que un gorrito se lleva 282.6 cms^2de cartulina. Entonces 300 gorritos se llevarán: 300 x 282.6 cms^2 = 84,780 cms^2 de cartulina.

2. Determina la superficie de un cono de 5cms de radio y 12cms de altura.

Solución:

Como la superficie del cono S = πr(r + g) y r = 5cms., y g = $\sqrt{h^2 + r^2}$, entonces:
g = $\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + 52} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169}$ cms^2 = 13 cms. Ahora puedes determinar el área total, que es S = 3.14 (5cms)(5cms + 13cms) = 3.14 (5cms)(18cms) = 282.6 cms^2.

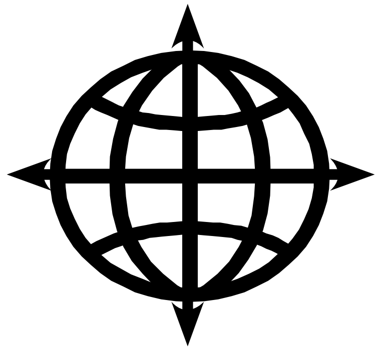
La Esfera

Observa esta pelota, tiene forma esférica.

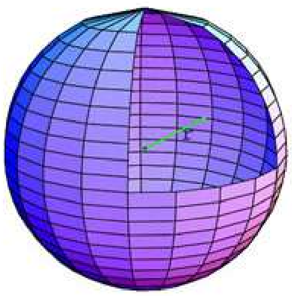
Este globo terráqueo, tiene forma esférica.

Esto significa que la esfera es un cuerpo redondo, que generalmente se forma al girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

Si deseas saber qué cantidad de material se necesita para armar esta pelota, tendrías que debaratarla y verías que equivale a 4 círculos. Como el área de un círculo es πr^2, entonces tendrías 4 πr^2; suponiendo que el diámetro de la pelota es de 30 cms, entonces el radio sería de 15 cms, por tanto, el material que necesitas es: 4 πr^2 = 4(3.14)(15cms)^2. Es decir: 12.56 x 225cms^2 = 2,726cms^2 de material.



Si ahora quieres llenar la misma pelota de agua, cuantos cms de agua necesitas.



Pues tendrías que multiplicar 4/3 de Pi (π) por la longitud del radio elevado al cubo, o sea:

$V = 4/3\pi r^3 = 4/3\ (3.14)(15cms)^3 = 4/3(3.14)(3375cms^3)=$
V = 14,130 cms cúbicos de agua.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Determina la superficie lateral de un cilindro recto, de 12cms, de altura, si sus bases tienen 8cms. de diámetro.

2. Calcula el radio de la base de un cilindro recto de 226.8cms^2 de superficie lateral, si su altura mide 12cms.

3. Halla el área total de un cilindro de resolución de 10cms de altura, si el radio de la base mide 4cms.

4. Calcula el área total de un cilindro recto de 12cms, de altura, si el diámetro de la base mide 6cms.

5. Calcula el área lateral de un cilindro de 8m, de diámetro si su altura es de 24m.

6. Determina la altura de un cilindro de 628cms^2 de área, si el radio de la base es de 10cms.

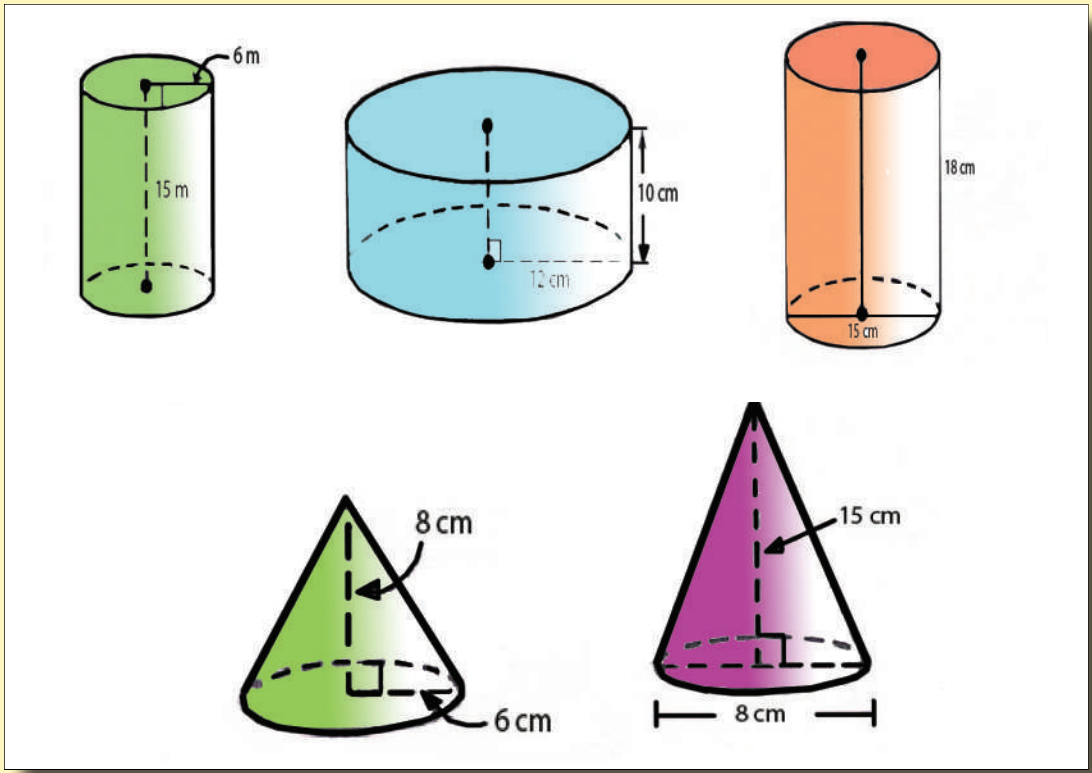
7. El radio de una columna cilíndrica tiene 58cms y su altura es de 4m. ¿cuál es el área lateral de la columna?

8. El radio de la base de un cilindro es la quinta parte de su altura. Si la generatriz mide 20cms. calcula la superficie lateral del cilindro.

9. Halla el área total de un cilindro donde la superficie lateral equivale a la superficie de las bases y la altura del cilindro es el triplo del diámetro. El radio de una base mide 3.2m.

10. Un cilindro de 314dms^2 de área lateral y 132dms, de altura. Calcula el área de las bases.

11. Determina la superficie de estos cuerpos redondos:.

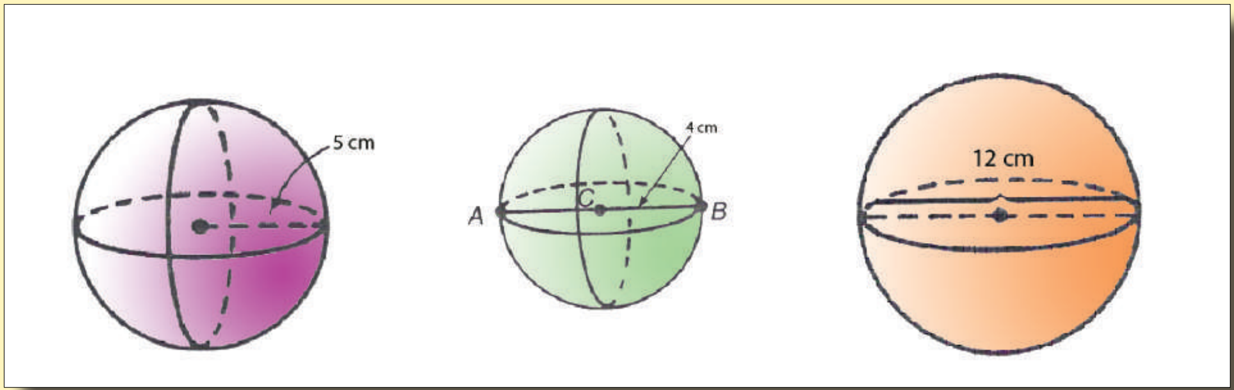


12. La superficie total de un cono es de 204.1cms. Calcula el radio de la base si la generatriz mide 8cms.

13. Si la longitud de la circunferencia de la base de un cono recto es de 28.26m y la generatriz es de 15m, halla el área lateral.

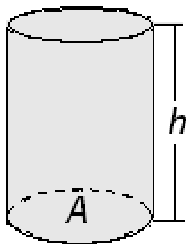
14. Si el área de la base de un cono es de 12.56cms^2 y la superficie total es de 31.4cms^2, halla la altura del cono.

15. Calcula la superficie estas esferas:.



Volumen de los cuerpos redondos.

Volumen del Cilindro.



El volumen de un cilindro equivale al área de su base por la altura.
$V = Bh$. Como la base es un círculo, entonces $B = \pi r^2$, por lo que :

$$\boxed{V = \pi r^2 h.}$$

Ejemplos:

1. Determina cuantos cms cúbicos de refresco se necesitan para llenar este paquete, si cada lata tiene 6 cms de diámetro y 12cms de altura.

Solución:

Como el volumen de una lata es $V = \pi r^2 h$ y $d = 6$ cms, por tanto $r = 3$cms si $h = 12$, entonces $V = 3.14(3\text{cms})^2(12\text{cms}) = 3.14\ (9\text{cms}^2)(12\text{cms}) = 339.12\ \text{cms}^3$.

Lo que significa que para llenar las 6 latas se necesitan $339.12\ \text{cms}^3 \times 6 = 2{,}034.72\ \text{cms}^3$.

2. Calcula el volumen de un cilindro de 5 cms de radio y 15 cms de altura:

Solución:

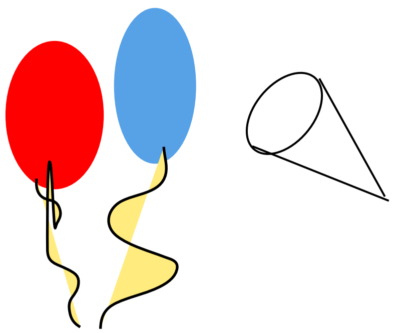
Como el volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h$ y $r = 5$ cms, $h = 15$ cms; entonces
$V = 3.14\ (5\text{cms})^2(15\text{cms}) = 3.14\ (25\text{cms}^2)(15\text{cms}) = 1{,}177.5\ \text{cms}^3$.

Volumen del Cono.

El volumen de un cono recto es igual a un tercio del producto del área de su base por la altura. $V = 1/3\ Bh$, y como la base es un círculo, entonces $B = \pi r^2$, de donde: $V = 1/3\ \pi r^2 h$

Ejemplos:

1. Rosita desea saber que cantidad de gofio tiene que utilizar para llenar los conitos en el cumpleaños de Eros, y como los conitos forman conos de 6 cms de diámetro y 18 cms de altura, entonces lo que necesita es hallar el volumen de cada cono.



Solución:

Como el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura, y la base es un círculo de 3 cms de radio, entonces Rosita puede utilizar la formula: $V = 1/3\ Bh = 1/3\ \pi r^2\ h = 1/3(3.14)(3cms)^2(18cms) = 169.56$ cms.3 Significa que cada gorrito se llena con 169.56 cms3 de gofio.

1. Halla el volumen de un cono de 12 cms, de altura 9 cms, de radio en su base.

Solución:

Como el volumen de un cono es: $V = 1/3\pi r^2 h$, y h = 12 cms y r = 9cms, entonces L

$V = 1/3\ (3.14)(9cms)^2\ (12cms) = 1{,}017.6\ cms^3$.

Volumen de la esfera.

El volumen de una esfera es 4/3 del radio elevado al cubo.

$$\boxed{V = 4/3\pi\ r^3}$$

Ejemplos:

1. Se desea hacer una bola de cemento que tenga 250 ms. de diámetro ¿Qué cantidad de mezcla se necesita?

Solución:

Como el volumen de una esfera es: $V = 4/3\pi\ r^3$ y $r = ½\ d$, y $d = 125$ ms, entonces:
se necesitan : $V = 4/3\ (125ms)^3 = 4/3\ (3.14)\ (1{,}953{,}125\ ms^3) = 8{,}177{,}083.33\ ms^3$ de mezcla.

2. Calcula el volumen de una esfera de 8 cms de radio.

Solución:

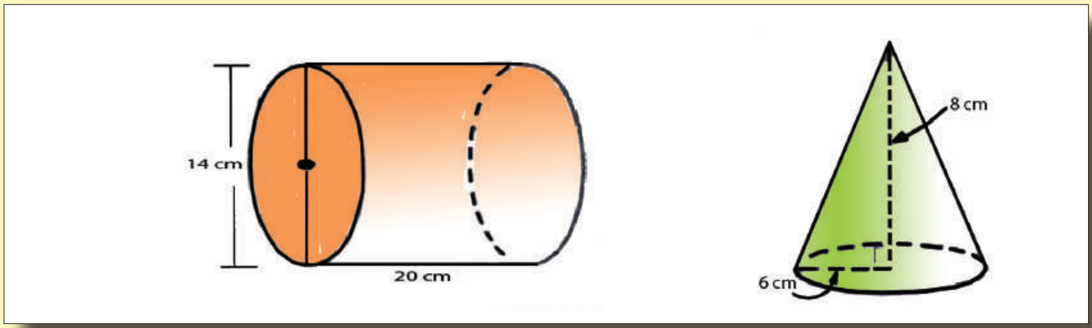
Como el volumen de una esfera es: $V = 4/3\ \pi r^3$ y r = 8cms, entonces

$V = 4/3(3.14)(8cms)^3 = 4/3\ (3.14)(512cms^3) =$

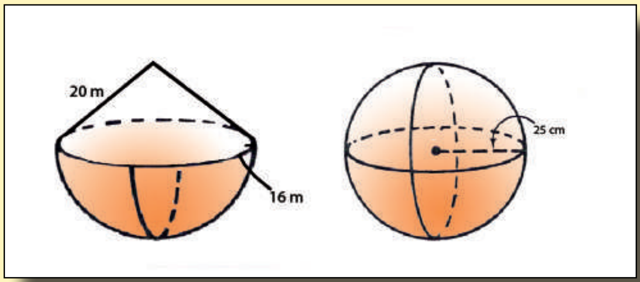
$V = 2{,}143.573\ cms^3$

Es el momento de practicar lo aprendido

1. ***Determina el volumen de un cilindro de 6cms de diámetro y 15cms de altura.***
2. ***Halla la altura de u cilindro de 4cms de radio y 502.4cms^3 de volumen.***
3. ***Si la altura de un cilindro es 1/3 del radio y el radio mide 6cms. Halla el volumen.***
4. ***Halla el volumen de un cilindro de 8cms de altura, si el radio es 1/2 de la altura.***
5. ***Determinala superficie y el volumen de estos cuerpos redondos:***



6. ***Si la generatriz es el doble del radio y el volumen del cono es de 502.4cms^3. Halla la generatriz.***
7. ***Calcula la altura de un cono de 48cms de generatriz, sabiendo que el radio de la base mide 26cms.***
8. ***En un cono recto la generatriz es el doble del diámetro de la base cuya circunferencia es de 18.84. Calcula el volumen.***
9. ***Calcula el volumen de un cono, si la altura es el doble del radio y la circunferencia mide 6.28cms.***
10. ***Determina el volumen de un cono, si la generatriz es 1cm mayor que la altura y el radio es 7cms menor que la altura.***
11. ***La longitud de la base de un cono es una circunferencia de 24cms. Halla el radio y el volumen del cono si la altura es 1/3 del radio. Halla el área de una esfera de 5cms, de radio.***
12. ***Halla el volumen de estos cuerpos:***
13. ***Calcula el radio de una esfera, cuando el volumen es igual a 4 2/3 de su área.***
14. ***Determina el volumen de una esfera, cuando su área equivale al volumen.***



UNIDAD VI

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

Introducción

Se ha dicho en el marco teórico, que los objetivos generales de los cursos universitarios de nivelación son ***apoyar el desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes relacionadas a la matemática.***

Con el objeto de alcanzar estos objetivos se propone un método de trabajo adecuado a la matemática axial como un conjunto de ejercicios, que permiten al estudiante afianzarse en los procesos mentales que en cada unidad en que se ha dividido este curso de nivelación, se presentan.

Objetivos específicos de esta unidad:

En esta sexta unidad del ***"Curso universitario de nivelación"*** que lleva el título "Introducción a la Estadística" se busca ofrecer al alumno una serie de conceptos elementales sobre estadística. Así pues, esta unidad tiene como objetivo principal ofrecer a los alumnos: algunos conceptos básicos de la estadística, de modo estos pueden comprender la información que sobre datos sociales que aparecen constantemente en la prensa, en los libros y en los informes elaborados por centros de investigación sobre hechos y fenómenos de la sociedad.
Entre los objetivos que esta unidad intenta alcanzar están:

desarrollar en el alumno:
* las c***apacidades de elaborar conceptos,***
**** las capacidades de relacionarnos para construir una especie de mapa cognitivo***
**** las capacidad de aprender a discriminar un conjunto amplio de conceptos***

Por lo que se recomienda realizar los ejercicios de esta unidad para completar el desarrollo de las funciones mentales que se han propuesto desarrollar en este curso de nivelación, como son el afianzamiento de.

- la ***capacidad de discriminación*** de las situaciones del ejercicio.
- así como afianzar los automatismos de estos procesos mentales

Sistematización de esta clase de ejercicios para esta unidad

Escoge una sección de texto de la Unidad VI y establece estos pasos:

1º Elabora un listado de palabras o conceptos importantes expresados en esta unidad.
2º Intenta construir un mapa cognitivo en el que se indiquen sus interrelaciones, al mismo tiempo que las expliques.
3º Este ejercicio puede repetirse con otras secciones para intentar construir un esquema completo de los principales conceptos e interrelaciones que existen en la unidad.

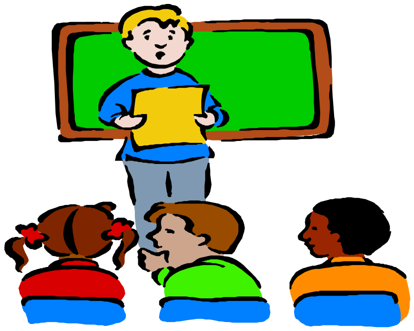
VI.1 Introducción a la Estadística.

Los fenómenos sociales, económicos, físicos, políticos, comerciales, industriales, etc., que suceden en nuestro país y en el mundo, necesitan de métodos ágiles que den resultados que te permitan su comprensión; es entonces cuando aparece la estadística para medir las situaciones del pasado, su variabilidad y la probabilidad de ocurrencia en el futuro La estadística es, pues, la técnica que utiliza la ciencia para recolectar, presentar y analizar ***datos*** con un fin determinado.

¿Qué dio origen a la estadística?

1. La necesidad de realizar censos y recuentos.
2. Los juegos de azar.
3. El estudio de errores de medidas
4. La inferencia inductiva, con base en datos empíricos.

¿Por qué debes saber estadística?



Para ***poder interpretar*** las encuestas que se realizan y la recopilación de los datos que originan las actividades que desarrollan las instituciones y organizaciones de la sociedad.

*** ¿Qué harías para conocer la opinión que tienen todos los alumnos de tu escuela sobre la forma de sus profesores enseñar la matemática?

¿Qué criterios seguirías para lograr tal fin? ¿Cuál es la población a investigar ? P = Población = *{x/x es un alumno de la escuela}*

¿Cómo eliges una muestra de esa población?

M = {curso A, curso B, curso D} $M \subset P$

La Población es tu Universo, en el estudio de una determinada investigación y la muestra es un sub-conjunto del Universo.

¿Cuál es el Universo que utilizarías si te asignan que investigues sobre los deportes en tu escuela? ¿Qué muestra elegirías ? ¿Cómo recolectarías los datos?

VI.2 Recolección de Datos.

¿Qué son los *datos estadísticos*? Pues, el conjunto de valores asignados a cada elemento del Universo que formas en una investigación.

¿Cómo pueden ser los datos?

Si deseas conocer algo sobre la estatura de cada uno de tus compañeros de escuela :
¿Cuál es tu Universo?
U = {*x/x es un alumno de la escuela*}
¿Cuál es tu muestra?
M = {*x/x es un alumno del curso A y B*} ¿Cuáles datos obtienes?
D = {*x/x es el tamaño de los alumnos del curso A y B*} ¿Qué variable utilizas? Pues, x = altura.

¿Cómo son los datos? Cuantitativos, porque hay que representar con un número la altura cada elemento de la muestra.

¿Cuál es el atributo? El tamaño de cada alumno.

Por el contrario: *Si los valores asignados a cada elemento de la población son, por sus cualidades sexo, sabor, color, tamaño, entorno, etc. los datos son cualitativos; pero aquellos valores que se obtienen por mediciones o conteo, es decir, son valores numéricos, los que asignas a cada elemento del Universo, entonces, estos datos son cuantitativos.*

*** Si ahora quieres investigar sobre el color del uniforme de tu escuela. ¿Cómo son los datos?
Como el color es una cualidad, entonces los datos son ***cualitativos.***
Después de seguir el procedimiento adecuado para obtener los datos, entonces tienes que planificar una actividad que produzca estos datos, es decir tienes que hacer el experimento.

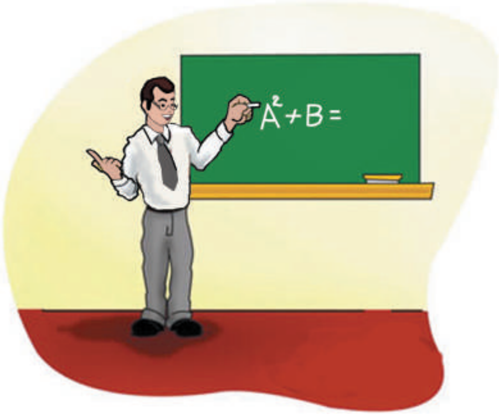
¿Cómo pueden ser las variables?

Si puedes tomar cualquier valor dentro de un conjunto de valores, la variable cuantitativa es continua, como, por ejemplo, si debes hacer una encuesta de la estatura de los alumnos de tu curso, pero si sólo puedes tomar valores aislados de un conjunto, la variable es cuantitativa discreta, como cuando una investigación se hace con el número de hijos de un matrimonio.

¿Cómo puede ser la técnica de muestreo?

Si cada elemento del Universo tiene la misma probabilidad de ser escogido, el muestreo es ***aleatorio simple*** o de ***lotería***. Pero si haces una partición del Universo en sub-conjuntos entonces el muestreo es por ***conglomerado***, y si seleccionas como muestra una parte de la población que te parece conveniente, entonces el muestreo es ***deliberado***.

*** Si quieres investigar la opinión que tiene el curso sobre el profesor de física, en el sentido de si conviene o no conviene, y no quieres preguntarle a cada compañero, pero sí deseas que la investigación refleje el sentir del curso, y para elegir la muestra echas en una funda todos los números de los estudiantes del curso. ¿Cómo es la muestra? Pon ejemplos de cómo utilizas los diferentes tipos de muestreo.



*** Si quieres determinar cuántas personas visitan por día el Centro Olímpico Nacional; ¿Cuál es tu Universo o población ? ¿Cómo escoges los datos ? ¿Qué tipo de muestra utilizarías?

*** Si deseas saber el peso promedio de los alumnos de tu escuela. ¿Cómo eliges la muestra? ¿Qué harías para recolectar los datos?

Disposición y Clasificación de datos: Distribución de frecuencias.

Manuel, del Colmado San Pedro, recibe 30 paquetes de arroz a razón de 16 onzas por paquete, pero antes de recibirlos pensó que no todos tenían una libra, entonces decide pesar todos los paquetes y obtiene los siguientes datos: 8 paquetes tienen 14 onzas; 2 paquetes, 15 onzas; 5 paquetes, 16 onzas; 9 paquetes, 13 onzas y seis paquetes tienen 12 onzas.

Organiza la información de acuerdo con la variable que es el peso en onzas, de menor a mayor, así :

Aquí tienes los datos en una tabla que te indica la organización y clasificación de los datos obtenidos con la frecuencia en que se presentaron. Esta es una Tabla de Frecuencia.

Peso de 30 paquetes de arroz

Valores de la variable	Frecuencia absoluta
Peso en Onzas	No. de paquetes
12	6
13	9
14	8
15	2
16	5

Tabla de Frecuencia.

Esta tabla te ofrece diversas informaciones sobre la muestra : el mayor número de paquetes de arroz está entre 6 y 9. Solamente hay 2 paquetes de 15 onzas y 5 paquetes de 16 onzas. Estas son las ***inferencias estadísticas.***

Aparte de todas estas informaciones, es preciso conocer el porcentaje de la muestra que corresponde a cada valor de la variable, esto es, la *frecuencia relativa* [%fr].

Si ***n*** es el ***tamaño de la muestra*** y ***f*** es la ***frecuencia*** que corresponde al valor x de la variable, entonces: %fr = (f ÷ n)100%

A la tabla de frecuencia anterior, puedes agregarle la columna de frecuencia relativa, determinando el porcentaje de frecuencia para cada peso :

x_1 = 12, f = 6, n = 30 entonces : %fr = (f ÷ n)100% => (6 ÷ 30)100 = 20%
x_2 = 13, f = 9, n = 30, entonces : (9 ÷ 30)100 = 30%
x_3 = 14, f = 8, n = 30, entonces : (8 ÷ 30)100 = 26.67%
x_4 = 15, f = 2, n = 30, de donde : (2 ÷ 30)100 = 6.67%
x_5 = 16, f = 5, n = 30, de donde : (5 ÷ 30)100 = 16.67%

x	*f*	*% fr*
12	6	20
13	9	30
14	8	26.67
15	2	6.67
16	5	16.67
	n = 30	100%

La frecuencia acumulada Fa, puedes obtenerla sumando la frecuencia que corresponde a cada valor de la variable más su siguiente, expresado en forma acumulativa con dicha suma. Observa:

x	*f*	*%fr*	*Fa*
12	6	20	6
13	9	30	15 = 6 + 9
14	8	26.67	23 = 15 + 8
15	2	6.67	25 = 23 + 2
16	5	16.67	30 = 25 + 5

Puedes hallar la frecuencia acumulada relativa, determinando el % de la frecuencia acumulada, así:

x	*f*	*%fr*	*Fa*	*%Fa*
12	6	20	6	20
13	9	30	15	50
14	8	26.67	23	76.67
15	2	6.67	25	83.33
16	5	16.67	30	100

Esta es la tabla de distribución de frecuencia con todas sus columnas.

Fa = (Fa ÷ n)100%
= (6 ÷ 30)100 = 20%
= (15 ÷ 30)100= 50%
= (23 ÷ 30)100 = 76.67%
= (25 ÷ 30)100 = 83.33%
= (30 ÷ 30)100 = 100%

Ejercicios:

*** Si en tu barrio deseas hacer una investigación del deporte favorito de los jóvenes que acuden al club deportivo, resulta que: 150 prefieren ping pong, 80 boxeo, 200 baloncesto, 50 voleibol, y 320 béisbol, ¿Cuántos jóvenes participaron en la investigación?

100 + 80 + 150 + 50 + 220 = 600 jóvenes. = n

Construye una tabla completa de frecuencias: ¿Qué % es 150 del total de jóvenes?

% f = 150 ÷ 600 = 0.25 = 25%

x	*f*	*%fr*	*Fa*	*%Fa*
50				
80				
100				
150				
200				

*** Si vas a hacer una encuesta sobre la preferencia gubernamental en tu barrio y eliges una muestra de 50 personas, con edades entre 18 y 40 años; esto significa que tu campo de variación es 40 - 18 = 22.

Esto significa que el 25% de los jóvenes prefieren ping pong

La muestra de edades de tus entrevistados es:

Muestra Bruta						
21	18	20	22	23	26	30
38	40	28	37	20	18	40
24	33	26	18	27	38	23
28	34	40	20	26	21	22
35	26	38	36	37	39	21
29	23	19	30	35	26	31
37	32	31	22	20	37	25
24						

Esta ***muestra bruta*** te permite hacer una clasificación de los datos en orden decreciente, te da sugerencias para la organización de las informaciones obtenidas, de forma que puedas obtener una conclusión correcta para los fines propuestos.

Ahora debes clasificar la información, entonces agrupas la muestra por grupos o clases de edades y con tu campo de variación formas los intervalos de grupos o clases. La frecuencia con que aparecen las edades está en la siguiente tabla:

Tabla de Frecuencia

Variación	*Frecuencia*	*Variación*	*Frecuencia*
18	3	29	1
19	1	30	2
20	4	31	2
21	3	32	1
22	3	33	1
23	3	34	1
24	2	35	2
25	1	36	1
26	5	37	4
27	1	38	3
28	2	39	1

Puedes agrupar la variación y obtener ***Frecuencias condensadas agrupadas***, creando intervalos de clase, entre los límites de 18 a 40, formando tipos de intervalos de clase:

Estas tablas te muestran en forma condensada el tipo de la distribución de una cantidad variable a lo largo del campo de variación.

Cada intervalo de clase tiene un tipo y cada clase tiene un valor que lo representa, que es su centro.

Este centro se encuentra en el medio de la clase de distribución y es equivalente a la semi-suma de sus límites, de ahí que se le denomine: ***Centro de Clase.***

Intervalos	Frecuencia
17-19	4
20-22	10
23-25	6
26-28	8
29-31	5
32-34	3
35-37	8
38-40	7
Total	**n = 50**
Tipo 4	

Intervalos	Frecuencia
17-21	14
22-26	12
27-31	8
32-36	9
37-41	7
Total	**n = 50**
Tipo 5	

$$\text{Centro de Clase} = \frac{\text{límite superior} + \text{límite inferior}}{2}$$

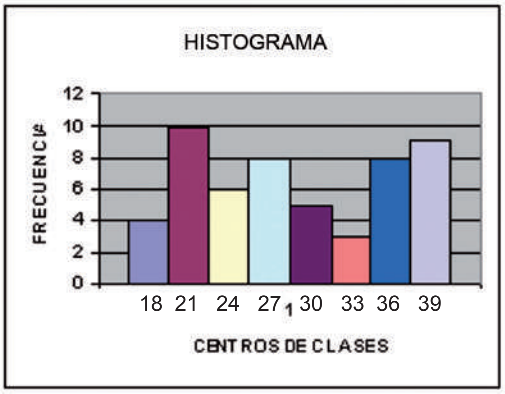
Puedes completar mejor la tabla de frecuencia si agregas columnas que te ayuden a obtener una información más precisa; por ejemplo, creando la columna de ***frecuencia relativa,*** (%fr) la columna de ***frecuencia acumulada*** (Fa) y la columna de ***frecuencia acumulada relativa***.(%Fa)

Recuerda que
Cuando la estadística se ocupa del estudio cuantitativo del comportamiento de la población humana en variables como: fecundidad, mortalidad, inmigración, salud, etc, se denomina Demografía

VI.3 Gráficos Estadísticos.

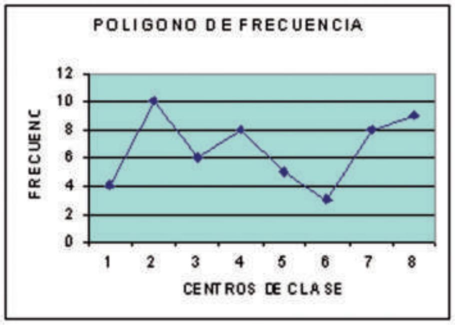
Si deseas hacer un gráfico de la distribución de frecuencia tipo 3, de la encuesta de las edades, hallas los centros de clase y obtienes :

Intervalos	Centros de Clase	Frecuencias
17-19	18	4
20-22	21	10
23-25	24	6
26-28	27	8
29-31	30	5
32-34	33	3
35-37	36	8
38-40	39	9



Este gráfico representa un ***histograma***, que tiene los centros de clase [tipo 3] en el eje horizontal y las frecuencias en el eje vertical. La altura de cada barra representa la frecuencia y la base el intervalo de clase .

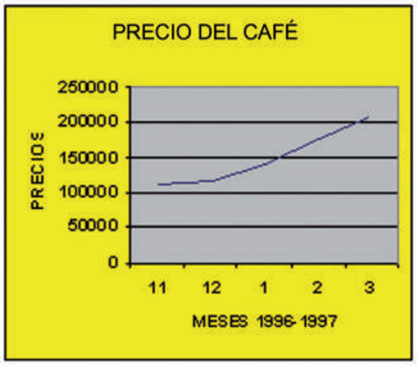
Si unes los puntos medios de cada barra, obtienes otro gráfico : el ***polígono de frecuencia***.



Recuerda que:
Las predicciones de los hombres de negocios va desde los volúmenes de ventas, medir las reacciones de los con sumidores ante sus mercancías, hasta determinar el mejor método para utilizar las habilidades y aptitudes de sus empleados. Este es el momento de hablar con los economistas para hacer las proyecciones necesarias, entonces, éstos aplican la Econometría para lograr sus objetivos.

En la Sección Económica del Listín Diario del 15 de marzo de 1997, aparecen los datos sobre el precio de las 100 libras del café de alta calidad para el año cafetalero 1996-97, de la siguiente forma: *noviembre 1996* de US$110.50, *diciembre/96* = U$114.75, *enero/97*= US$138.90, *febrero/97* =US$176.85, y *marzo/97* = US$203.15, construye la tabla de frecuencia y representa la producción en un sistema cartesiano.

Comportamiento del café nov/96-marzo/97	
Valores de la variable	**Frecuencia absoluta**
Meses	**Precio/100 libras**
Noviembre/96	110,500
Diciembre/96	114,750
Enero/97	138,900
Febrero/97	176,850
Marzo/97	203,150



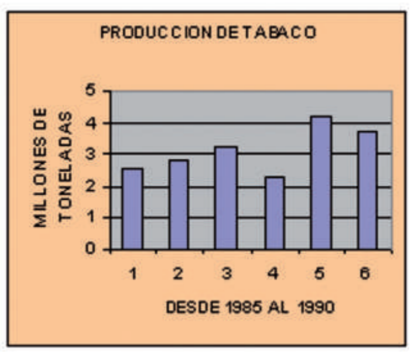
Este es un gráfico de ***segmentos***. En la recta horizontal colocas los meses de producción y en la recta vertical los precios, y a una escala escogida, donde cada punto es un par ordenado de valores de la tabla.

*** Si la producción de tabaco en la República Dominicana del 1985 al 1990 te la ofrece la siguiente tabla, puedes crear gráficos diversos con estos datos.

Producción de Tabaco	
Valores de Variable	Frecuencia Absoluta
Años	Producción en Millones de toneladas.
1985	2,5
1986	2,8
1987	3,2
1988	2,3
1989	4,2
1990	3,7

Gráfico de Barras

Observa el gráfico de barras: son barras paralelas colocadas en forma vertical, que también pueden estar en forma horizontal. Cada barra tiene un mismo ancho y una misma separación entre ellas.



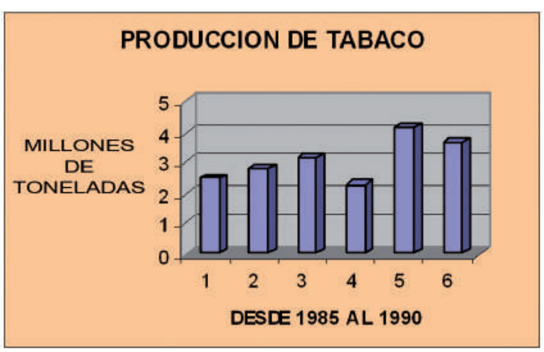


Gráfico Prismático

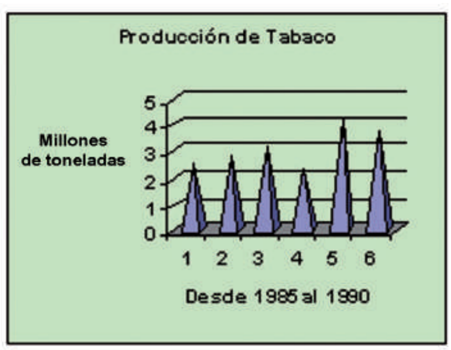
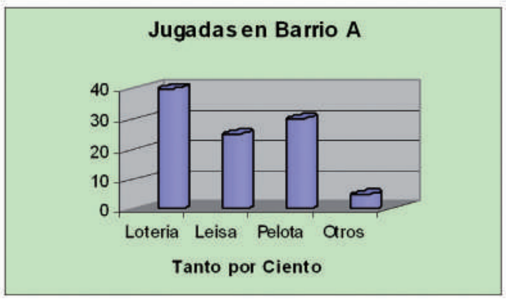


Gráfico Piramidal

*** Puedes hacer un sondeo de juegos de azar en un barrio, donde obtienes los siguientes resultados: el 40% juega a la lotería, el 25% juega quiniela palé, el 30% apuesta a la pelota y el 5% juega a otro tipo de juego. Representa en un gráfico circular o diagrama circular y construye la tabla de frecuencia.

Juegos del Barrio A.	
Clase de juegos	**Porcentaje**
Lotería	40
Leisa	25
loteka	30
Real	05

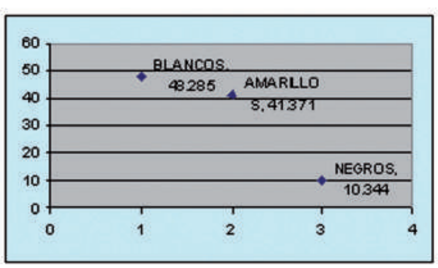


Los psicólogos también se valen de la estadística para medir y comparar la conducta, actitudes, inteligencia y aptitudes del ser humano, lo que en lenguaje técnico se conoce, como: ***Psicometría.***

Los gráficos que más se utilizan en estadística son: De segmentos, poligonal, de barras, de puntos, de columnas, de líneas, de áreas, de anillos, de superficie, cilíndricas, cónicas, piramidal y existen situaciones en que es más conveniente utilizar el circular, especialmente cuando se trata de porcentajes.

*** Si la población mundial está dividida de acuerdo al color de la piel, así : 1,400 millones de blancos, 1,200 millones de amarillos y 300 millones de negros. Determina el porcentaje de cada tipo y traza el diagrama circular.

Población Mundial		
Color de la Piel	**%**	**millones**
Blancos		
Amarillos		
Negros		
Universo n =	100%	2,900



Es el momento de practicar lo aprendido

1. *Si deseas saber qué tipo de automóvil es el que más utilizan en nuestro país, ¿Cómo lo harías? y ¿Cómo obtendrías los datos ?*

2. *Haz un sondeo de opinión sobre la popularidad de uno de tus profesores. Determina: la población, luego las muestras y construye la tabla de frecuencia.*

3. *Elabora los datos estadísticos de los alumnos que visitan la biblioteca. Población, muestra, datos, tabla de frecuencia y gráfico*

4. *Si en una muestra de pesos: 10 paquetes pesan 487 gramos, 2 paquetes 485 gramos, 5 pesan 502 gramos, 17 paquetes pesan 500gr, 2 pesan 510 gr., y 14 pesan 490 gr.. Determina : tabla de frecuencia, histograma y gráfico poligonal.*

5. *Una muestra de estatura de tus vecinos, escogidos 100 al azar, es como sigue : 8 miden, 1.51m, 13 miden 1.61m, 38 miden 1.6m, uno mide 1.52m, otro 1.4m, 28 miden 1.58m, dos miden 1.71m. 9 miden 1.7m. Construye el gráfico de barras y el poligonal.*

6. *Para conocer el precio de un artículo visitaste 130 tiendas y obtuviste la siguiente muestra: 10 lo tenían a 13.10, 30 a 13.20, 10 a 13.70, 10 a 13.80, 20 a 13.50 y 40 a 13.25. a. Construye la tabla completa de frecuencias. b. Gráfico poligonal. C. Gráfico de barras con el % de los artículos.*

7. *Esta es la lista de personas que alquilaron videos en una semana, determina: a. Tabla de frecuencia relativa, tabla de frecuencia acumulada b. Gráfico de barra.24, 39, 38, 21, 16, 44, 34, 66, 32, 35, 19, 33, 13, 25, 44, 46, 57, 60, 31, 40, 23, 27,43, 44, 32, 56, 52, 61, 30 y 20..*

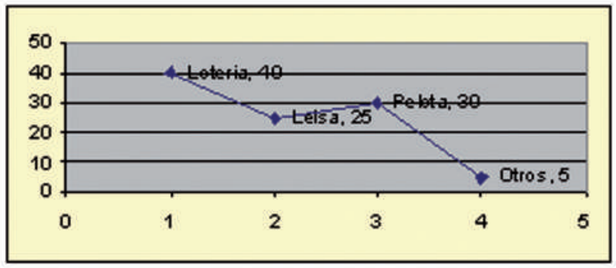
8. *El peso de 150 personas está en la siguiente distribución. Construye el histograma.*

Clase	Frecuencia	Clase	Frecuencia
70- 79	10	120-129	23
80- 89	11	130-139	9
90- 99	23	140-149	9
100-109	26	150-159	6
110-119	31	160-169	2

9. *Los datos que aparecen a continuación representan los minutos que te tomaste para llegar a la escuela durante 30 días: 20.8, 22.8, 21.9, 22, 20.7, 20.9, 25, 22.2, 22.8, 20.1, 25.3, 20.7, 22.5, 21.2, 23.8, 23.3, 20.9, 22.9, 23.5, 19.5, 23.7, 20.3, 23.6, 19, 25.1, 25, 19.5, 24.1, 24.2, 21.8, 23.7, 21.3.*

Organiza los datos en orden ascendente. Construye una distribución de frecuencia y de frecuencia acumulada. Traza el polígono de frecuencia.

"El pensamiento estadístico será un día tan necesario para un ciudadano eficiente como la capacidad de leer y escribir" Wells.



VI.4 Medidas de Tendencia Central.

La tabla de frecuencias te ofrece los diferentes datos de la muestra, y te presenta la distribución de esos resultados o distribución de la frecuencia, pero, es preciso tener en la tabla un resumen cuantitativo que permita hacer más generalizaciones del Universo estudiado.
Cuando concentras los valores numéricos alrededor de ciertos valores centrales del conjunto de datos, que da el Universo a través de la muestra, estás creando medidas centralistas, tales como : La media, la moda y la mediana.

Media Aritmética o Promedio.

Las notas de Mildred en el 8vo. Curso en matemática son : 80, 85, 70, 83, 78, 76 ; determina el promedio del semestre:

$$\text{Media} = [80 + 75 + 73 + 86 + 78 + 76] \div 6 = 78.5$$

Si el conjunto de los valores muestrales individuales en un determinado experimento es : $x_1, x_2, ..., x_n$, n es el número de elementos de la muestra y M representa la media, entonces :

$$M = \Sigma x_i \div n = [x_1 + x_2 + ... + x_n] \div n$$

Si aparecen valores repetidos en la muestra, entonces la media es igual al producto de la sumatoria de las variaciones por la frecuencia correspondiente, divido entre el Universo del experimento, o sea :

$$M = \Sigma x\, i\, f \div n \quad \text{donde } i = \text{desde 1 hasta n}$$

Ejemplo:
Si tienes que investigar sobre el número de páginas de los libros de la biblioteca de tu escuela y tomas una muestra de 80 libros, donde 9 tienen 310 páginas, 15 tienen 316 páginas, 7 tienen 300 páginas, 10 tienen 420, 12 tienen 126, 3 tienen 240, 1 tiene 418, 12 tienen 140 y 11 tienen 160. Para determinar la frecuencia y la media aritmética, tienes :

$$M = \frac{\Sigma x\, i\, f}{n}$$

$$M = x_1 + x_2 + x_3 + ... x_n \qquad n = 80$$

¿Qué significado tiene el símbolo Σ? ¿Cuándo se utiliza?

Tabla de Frecuencias	
No. Pag.	Frecuencia
126	12
140	12
160	11
240	3
300	7
310	9
316	15
418	1
420	10

La media es la sumatoria de la frecuencia por el número de libros, entre el entre el número de la muestra.

M = [12(126) + 12(140) + 11(160) + 3(240) + 9(310)+
+ 7(300) + 15(316) + 418 + 11(420)] ÷ 80

$$M = \frac{1512+1680+1760+720+2790+2100+4740+418+4620}{80}$$

M = 20400 ÷ 80 = 255, significa que el promedio de páginas por libros de la biblioteca es 255 páginas.

La Moda.

En la cancha deportiva reúnes 100 jóvenes, cuyas estaturas son: 30 miden 1.61 m, 38 miden 1.59 m, 13 miden 1.6 m, uno[1] mide 1.5 m, 8 miden 1.52 m, 8 miden 1.7 m, miden 1.45 m, elabora la tabla de frecuencia:

Estatura de 100 deportistas	
Variable x	Frecuencia absoluta
Estatuta en m.	No. de deportistas [fa]
1.49	2
1.50	1
1.52	8
1.59	38
1.60	13
1.61	30
1.71	8
Total 100	

¿Cuál es la frecuencia más alta?, 38

¿A qué estatura corresponde? 159

Entonces, la ***moda*** de esta tabla de frecuencia es 159.

Si en una investigación al dato x corresponde la mayor frecuencia, entonces x es la Moda de la investigación.

La Mediana.

Peso 30 paquetes arroz				
X	*f*	*%fr*	*Fa*	*%Fa*
12	6	20	6	20
13	9	30	15	50
14	8	26.67	23	76.67
15	2	6.67	25	83.33
16	5	16.67	30	100

Recuerda la tabla de los 30 paquetes de arroz:

Observa que la libra de arroz equivale a 13 onzas, ya que se hace con frecuencia de 9, siendo esta la frecuencia más alta, entonces la ***Moda es 13.***

Pero la Mediana es el valor de x que corresponde al 50% de la frecuencia relativa acumulada %*Fa*.

El valor de x que corresponde al 50% en la columna %Fa es 13, luego la mediana es 13, lo que significa que el 50% de las libras de arroz pesan 13 o menos onzas.

Es el momento de practicar lo aprendido

1. Con los datos que se te dan a continuación determina: a) la media, b) la moda c) la mediana

1. 20, 30, 40, 20, 50, 30, 40, 30, 50
2. 100, 120, 150, 100, 200, 120, 150, 100, 50, 120
3. 60, 80, 40, 60, 100, 120, 60, 20, 40, 100, 60, 20
4. 22, 36, 26, 62, 32, 32, 26, 29, 27, 24, 25, 30, 26, 29, 24, 34, 24, 29, 41, 30, 34, 37, 42, 41, 35, 31, 41
5. 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 120, 140, 160, 180.

Cuartiles, deciles y percentiles.

Cuando los valores ordenados de una variable deben ser divididos en grupos homogéneos en cuanto a tamaño, suelen utilizarse los cuartiles. Entre los cuartiles más utilizados se encuentran los cuartiles Q, deciles D, y percentiles P, los cuales dividen al total de observaciones en cuatro, diez y cien partes respectivamente.

Los cuartiles de una sucesión de datos ordenados son aquellos números que dividen la sucesión en cuatro partes porcentualmente iguales. Existen tres cuartiles, los cuales se denotan, usualmente, como Q_1, Q_2 y Q_3. El segundo cuartil Q_2, es precisamente la mediana de los datos ordenados.

La siguiente tabla corresponde a la distribución de frecuencias en el número de hijos de cien familias dominicanas. Calcula sus cuartiles.

Número de hijos de cien familias		
Variable x	Frecuencias	
Cantidad de hijos	Frecuencias absolutas	Frecuencias Acumuladas
0	14	14
1	10	24
2	15	39
3	26	65
4	20	85
5	15	100

Solución:

a. En el primer cuartil estarán $fa/4$ valores, es decir: $\frac{fa}{4} = \frac{100}{4} = 25$

¿Para qué cantidad de hijos la frecuencia acumulada es mayor que $fa/4$?

Por supuesto, para 2 hijos. Esto significa que el primer cuartil $Q_1 = 2$

En el segundo cuartil estarán $2fa \div 4$ valores, es decir:

$\frac{2fa}{4} = \frac{2(100)}{4} = \frac{200}{4} = \frac{50,}{4}$ lo que significa que la frecuencia acumulada será mayor que 50 para 3 hijos y entonces $Q_2 = 3$ c.

Por último, en el tercer cuartil estarán $3fa \div 4$ valores, es decir:

$\frac{3fa}{4} = \frac{3(100)}{4} = \frac{300}{4} = \frac{75,}{4}$ o sea, la frecuencia acumulada es mayor que 75 para 4 hijos y, el tercer cuartil $Q_3 = 4$

Qi es el valor del cuartil i;
Ei es el límite inferior de la clase del cuartil i;
N es el número de datos [igual a la frecuencia acumulada]
Fi es la frecuencia acumulada de la clase que antecede a la clase del cuartil i,
fi es la frecuencia absoluta de la clase del cuartil i;
L es la longitud del intervalo de la clase del cuartil i.

La tabla de la derecha muestra las edades agrupadas de 20 personas

Edades de 20 personas		
Variable x	Frecuencias	
Edad	Frecuencias Absolutas	Frecuencias Acumulada
10-19	2	2
20-29	3	5
30-39	3	8
40-49	6	14
50-59	5	19
60-69	1	20

Cálculo de los cuartiles: Q_1, Q_2 y Q_3

Cuartil Q_1

Determina primero la clase del cuartil: i(N/4), como se trata del cuartil 1, entonces i = 1 y tendrás 1(20/4) = 1(5) = 5.

Ahora ubica la clase donde la frecuencia acumulada es mayor que el valor de la clase del cuartil. Esto ocurre en la clase correspondiente a las edades 30-39 años. Por lo tanto.

$$Ei = \frac{29 + 30}{2} = 29.5 \quad ; \quad i = 1$$

$$N = 20 \quad ; \quad F_1 = 5 \quad ; \quad f_1 = 3 \quad ; L = 10$$

Si sustituyes en la fórmula, obtendrás:

$$Q_1 = 29.5 + \frac{1(20/4) - 5}{3} \; 10 = 29.5 + 5 - 5 \; 10 = 29.5 + 0 = 29.5$$

Este valor se interpreta de la manera siguiente: Aproximadamente el 25% de las personas encuestadas tienen edades por debajo de los 29 años; también puedes decir: "aproximadamente el 75% de las personas encuestadas tienen edades por encima de los 29 años".

Cuartil Q_2

Determina la clase del cuartil así:

$$i(N/4) = 2(20/4) = 2(5) = 10,$$

lo que significa que la clase del cuartil es la correspondiente a las edades comprendidas entre 40 y 49 años. Por tanto:

$$E_2 = \frac{39 + 40}{2} = 39.5; \quad i = 2; \quad N = 20$$

$$F_2 = 8 \quad ; \quad f_2 = 6 \quad ; L = 10$$

Si sustituyes estos valores en la fórmula, tendrás que:

$$Q_2 = 39.5 + \frac{2(20/4) - 8}{6} \,.\, 10 = 39.5 + \frac{2}{6} \,.\, 10 = 39.5 + \frac{20}{6} = 42.83$$

Esto significa que aproximadamente el 50% de las personas encuestadas tiene edades inferiores a los 43 años.

Cuartil Q_3

La clase del cuartil se determina así:

$$i(N/4) = 3(20/4) = 15$$

Como las frecuencias acumuladas son mayores a 15 para el grupo de edades correspondientes a 50-59 años, entonces ésta es la clase del cuartil Q_3; por tanto.

E_3 = ½ (49 + 50) = 49.5, i = 3
N = 20, F_3 = 14, f_3 = 5 y L = 10

Sustituyendo estos valores en la fórmula encontrarás que:

$$Q_3 = 49.5 + \frac{3(20/4) - 14}{5} \,.\, 10 = 49.5 + \frac{15 - 14}{5} \,.\, 10 = 49.5 + 2$$

Q3 = 51.5, es decir, aproximadamente el 75% de los escuestados tiene edades por debajo de los 51 años o aproximadamente el 25% de los encuestados tiene edades por encima de los 51 años.

Deciles.

Los deciles son ciertos números que dividen la sucesión de datos ordenados en diez partes porcentualmente iguales. Los deciles se denotan D_1, D_2, D_3, D_4, . . . D_a.

Para datos agrupados los deciles se calculan aplicando la fórmula:

$$Di = \frac{Li + i(N/10) - Fi}{fi} . L \qquad i = 1,2,3,4, ..., 9$$

Percentiles.

Los percentiles constituyen, sin lugar a dudas, las medidas más utilizadas para propósitos de ubicación o clasificación de las personas cuando se trata de características tales como: peso, estatura, medidas, etc.

Los percentiles son ciertos números que dividen una sucesión de datos ordenados en cien partes porcentualmente iguales. Cuando los datos están agrupados en una tabla de frecuencia, los percentiles se calculan aplicando la fórmula:

$$Pi = Li + \frac{i(N/100) - Fi}{fi} . L \quad \text{donde } i = 1,2,3, . .$$

Los elementos constitutivos de esta fórmula tienen interpretaciones análogas a las indicadas para los cuartiles y los deciles.

Ejemplos:

1. Para la tabla de datos agrupados, correspondientes a las edades de 20 personas encuestadas, determina el octavo decil y el percentil 26.

Solución:

Decil- D_8

Determina primero la clase de decil, así: $i(N/10) = 8(20/10) = 8(2) = 16$

La frecuencia acumulada es mayor que 16, entonces corresponde a la clase 50-59 años. Por tanto:

D_8 = ½ (49 + 50) = 49.5, i = 8, F_8 = 14, f_8 = 5 ; L = 10, sustituyendo en la fórmula obtendrás:

$$D_8 = 49.5 + \frac{8(20/10) - 14}{5} \cdot 10 = \frac{49.5 + 16 - 14 \cdot 10}{5} = 49.5 + 4 = 53.4$$

$D_8 = 53.4$, lo que significa que aproximadamente el 80% de las 20 personas encuestadas tienen edades inferiores a los 53 años o que, aproximadamente el 20% de los encuestados tienen edades que sobrepasan los 53 años.

Percentil 26 = P_{26}

La clase del percentil corresponde a: $i(N/100) = 26(20/100) = 520/100 = 5.2$

Como la frecuencia acumulada es mayor que 5.2, para la clase correspondiente a las edades comprendidas entre 30 y 39 años, entonces ésta será la clase de P_{26}, Por lo tanto:

$E_{26} = ½ (29 + 30) = 29.5$, $i = 26$, $F_{26} = 5$, $f_{26} = 3$, $L = 10$

$$P_{26} = 29.5 + \frac{26(20/100) - 5}{3} \cdot 10 = \frac{29.5 + 5.2 - 5}{3} \cdot 10 = 29.5 + 0.67 = 30.17$$

$P_{26} = 30.17$, lo cual significa que aproximadamente el 26% de los encuestados tiene edades por debajo de los 30 años o que, aproxiadamente el 74% de los encuestados tienen más de 30 años.

2. La siguiente tabla de frecuencias contiene muestras de las longitudes de 80 cartulinas. Determina Q_1, Q_2, Q_3, D_3, D_4, y P_{10}.

Longitudes de 80 cartulinas: Cms

Variables	*Frecuencia Absoluta*	*Frecuencia Acumulada*
60-68	4	4
69-77	7	11
78-86	6	17
87-95	8	25
96-104	8	33
105-113	10	43
114-122	7	50
123-131	10	60
132-140	7	67
141-149	6	73
150-158	4	77
159-167	3	80

Solución:

$I(N/4) = 1(80/4) = 1(20) = 20$, esto implica que la clase del ***cuartil Q_1*** corresponde a las longitudes 87-95 cms.; por lo tanto:

$E_1 = ½ (86 + 87) = 86.5$,

$i = 1$, $F_1 = 17$ $f1 = 8$; $L = 9$

Sustituyendo estos valores en la fórmula, tendrás:

$$Q_1 = 86.5 + \frac{1(80/4) - 17}{8} \cdot 9 = 86.5 + \frac{20 - 17}{8} \cdot 9 = 86.5 + 3.375 = 89.88$$

$Q_1 = 89.88$ □ Aproximadamente el 25% de los pedazos de cartulina tienen longitudes inferiores a los 90 cms.

Cuartil Q_2

I(N/4) = 2(80/4) = 40, entonces la clase de este cuartil corresponde a las longitudes comprendidas entre 105-113 cms. Por lo tanto:

$E_2 = ½ (104 + 105) = 104.5$; $i = 2$, $F_2 = 33$, $f_2 = 10$ y $L = 9$

Sustituyendo en la fórmula, obtendrás que: $Qi = Li + \frac{i(N/100) - Fi}{Fi} . L$; $i = 1,2,3, . .$

$$Q_2 = 104.5 + \frac{2(80/4) - 33}{10} . 9 = 104.5 + \frac{40 - 33}{10} . 9 = 104.5 + 6.3 = 110.8$$

$Q_2 = 110.8$ = Aproximadamente el 50% de las cartulinas tienen longitudes inferiores a los 111 cms.

Cuartil Q_3

Como i(N/4) = 3(80/4) = 3(20) = 60, entonces la clase que corresponde a este cuartil está entre la longitud 132-140 cms. Por lo tanto:

$E_3 = ½ (131 + 132) = 131.5$, donde $i = 3$, $F_3 = 60$, $f_3 = 7$ y $L = 9$

Sustituyes estos datos en la fórmula $Qi = Li + \frac{i(N/100) - Fi}{Fi} . L$ donde $i = 1,2,3, . .$ y obtendrás:

$$Q_3 = 131.5 + \frac{3(80/4) - 60}{7} . 9 = 131.5 + \frac{60 - 60}{7} . 9 = 131.5 + 0 = 131.5$$

$Q_3 = 131.5$ esto quiere decir que aproximadamente el 75% de las cartulinas tiene longitudes inferiores a 131.5 cms.

Decil D_3

Como 1(N/10) = 3(80/10) = 3(8) = 24, entonces la clase del decil D_3 está entre las longitudes 87 – 95 cms y por lo tanto:

$E_3 = ½ (86+87) = 86.5$, donde $i = 3$, $F_3 = 17$, $f_3 = 8$ y $L = 9$, sustituyendo en la fórmula,

$$Di = Li + \frac{i(N/100) - Fi}{Fi} . L \quad ; \quad i = 1,2,3, . .$$

obtendrás que:

$D_3 = 86.5 + 3(80/10) – 17 . 9 = 86.5 + 24 – 17 . 9 = 86.5 + 7.875 = 94.38$

D_3 = 94.38 esto significa que el 30% aproximadamente de las cartulinas tiene longitudes inferiores a los 94 cms.

Decil D_4

Como i(80/10) = 4(80/10) = 4(8) = 32 , entonces quiere decir que la clase de este decil, es la que corresponde a las longitudes entre 96 y 106 cms., por lo tanto:

$E_4 = ½(95 + 96) = 95.5$, donde i = 4, $F_4 = 25$, $f_4 = 8$ y L 9 sustituyes en la fórmula

$$Di = Li + \frac{i(N/100) - Fi}{Fi} \,.\, L \quad \text{donde } i = 1, 2, 3, \ldots$$

y obtendrás.

$$D_4 = 95.5 + \frac{4(80/10) - 25}{8} \,.\, 9 = 95.5 + \frac{32 - 25}{8} \,.\, 9 = 95.5 + 7.875 = 103.38 \text{ cms.}$$

D4 = 103.4, esto indica que aproximadamente el 40% de las cartulinas tiene longitudes menores que los 103 cms.

Percentiles P_{10}

Como i(80/100) = 10(80/100) = 10(0.8) = 8, lo cual quiere decir que la clase de este percentil P_{10}, es a la de longitudes comprendidas entre 69 y 77 cms, por lo tanto:

$E_{10} = ½(68 + 69) = 68.5$, donde i = 10, $F_{10} = 4$, $f_{10} = 7$ y L = 9 sustituyes en la fórmula

$$Pi = Li + \frac{i(N/100) - Fi}{Fi} \,.\, L \quad \text{donde } i = 1,2,3, \ldots$$

y obtendrás:

$P_{10} = 68.5 + 10(80/100) – 4 \,.\, 9 = 68.5 + 8 – 4 \,.\, 9 = 68.5 + 5.14 = 73.64$ cms., lo que significa que el 10% de las cartulinas tiene longitudes inferiores a los 74 cms.

VI.5 Medidas de variabilidad.

Como has podido notar, una de las características de los datos es que, por lo general varían entre sí, lo que es de gran importancia para la estadística. Pudiste darte cuenta que las medidas de tendencia central describen aspectos importantes del conjunto de datos, pero esto no es suficiente ya que existen otras características en los datos que precisan su medición en la medida en que se dispersan o se diseminan, es aquí donde interviene la variabilidad.

La variabilidad es fundamental en la estimación, pruebas de hipótesis, pronósticos, etc.,

$$\sigma^2 = 1/N \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

La ***varianza de una población*** de N observaciones x_1, x_2, x_3, x_4, ... x_N, es el promedio del cuadrado de las desviaciones con respecto a su media μ. Si la varianza de la población es σ entonces para su cálculo lo obtendrás fórmula de la izquierda.

La ***varianza de una muestra*** de n observaciones x_1, x_2, x_3, x_4, . . . x_n, es la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto a la media x, dividida esta suma entre (n – 1). Si la varianza de la muestra es s, entonces su cálculo lo obtendrás con la fórmula:

$$s^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

x_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	x_i^2
5	1.4	1.96	25
6	2.4	5.76	36
1	-2.6	6.76	01
2	-1.6	2.56	04
4	0.4	0.16	16
18	**0**	**17.20**	**82**

Si tienes las observaciones muestrales de: 5, 6, 1, 2, 4, entonces su media es 18/5 = 3.6, ahora puedes construir la siguiente tabla:

Si aplicas la fórmula puedes determinar la ***varianza muestral*** así:

$$s^2 = 1/(n-1) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Como la suma de los cuadrados de las desviaciones es: 17.20, entonces se tiene que:

$s^2 = 1/(n-1)\,[17.20] = 1/(5-1)\,[17.20] = \frac{1}{4}\,[17.20] = 4.3$

Entonces la varianza de la muestra es 4.3

Generalmente se cuenta con la totalidad de observaciones de una población y únicamente se dispone de una muestra de las observaciones tomadas de la población, por esto la media muestral se utiliza como un estimador de la media de la población.

La desviación estándar de la población es la raíz cuadrada de la media de las desviaciones respecto de la media de la población, elevada al cuadrado.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\mu)^2}{N}}$$

Mientras que la ***desviación estándar*** de la muestra equivale a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{1/(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

En el ejemplo anterior la desviación estándar es: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4.3} = 2.0736$

El cálculo directo de la desviación estándar de la muestra viene dada por la fórmula, donde:

n = número de observaciones.

x = observaciones

s = desviación estándar

$$s = \sqrt{\frac{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}{n(n-1)}}$$

Calcula la desviación estándar de 6 interruptores colocados en Altagracia Peluquería para activar una alarma, los cuales se activan en: 11, 9, 8, 5, 7 y 6 milisegundos.

Solución:

Como n = 6, $\Sigma x = 11 + 9 + 8 + 5 + 7 + 6 = 46$ y

$\Sigma x^2 = 121 + 81 + 64 + 25 + 49 + 36 = 376$ entonces sustituyes en la fórmula y obtienes:

$$s = \sqrt{\frac{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{6(376) - (46)^2}{6(6-1)}} = \sqrt{\frac{2256 - 2116}{6(5)}} = \sqrt{\frac{140}{30}} = \sqrt{4.67} = 2.16$$

El teorema de Chebyshev nos ayuda a comprender mejor la desviación estándar:

En relación con un conjunto de datos cualquiera [población o muestra] y una constante k cualquiera mayor que 1, cuando menos 1 – 1/k2 de los datos deberán estar dentro de k desviaciones estándar, a uno u otro lado de la media.

Esto significa que si k = 2 entonces puedes estar seguro de que cuando menos ¾, o 75 por ciento, de los valores de un conjunto de datos cualquiera deberán estar entre la media menos dos desviaciones estándar y la media más dos desviaciones estándar.

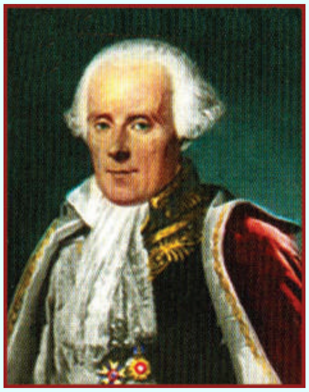
La desviación estándar como medida de variación depende de las unidades de medición, por lo tanto es una medida de variación relativa y se necesita un ***coeficiente de variación***, que es el siguiente:

Coeficiente de variabilidad, es el cociente de dividir la varianza entre la media, multiplicado por 100.

$V = s \div X .100$

$V = s \div \mu .100$

NOTA HISTÓRICA



En el siglo XIX Pierre Simón, Marqués de Laplace [1749-1827], unificó todas las ideas, fórmulas y técnicas de probabilidad, creadas por : Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Thomas Bayes y Joseph Lagrange. La teoría de la probabilidad fue aplicada a los juegos y con el tiempo a los problemas socioeconómicos.
En el siglo XIX nace la industria de los seguros y su fuente fundamental fue la probabilidad, ya que requería conocimientos exactos del riesgo de perder, pues de lo contrario era imposible calcular las pólizas. Hoy en día la teoría matemática de la probabilidad forma parte del fundamento de las aplicaciones estadísticas para la investigación social y la toma de decisiones.
En las decisiones de carácter personal y gerencial, casi siempre enfrentamos la incertidumbre, cuando nos anuncian el 65% de probabilidad de lluvia, generalmente cambiamos nuestros planes de salir de día de campo. La probabilidad forma parte de nuestra vida diaria, somos incapaces de pronosticar el futuro con absoluta certeza, y esa necesidad de sortear la incertidumbre nos conduce a estudiar la teoría de la probabilidad.

VI.6 Probabilidad.

Meteorología anuncia que la probabilidad de lluvia para la Ciudad de Santo Domingo es de un 80%.¿Qué significa eso? ¿Cómo se mide este número probable? ¿Qué principios matemáticos deben cumplir las probabilidades?

Ejemplos:

*** ¿Cuál es la probabilidad de sacar una AS de un juego de 52 cartas bien barajado?

Solución: Existen s = 4 ases entre las n = 52 cartas, entonces tienes 4 de 52, es decir
s/n = 4/52 = 1/13

*** Si 540 de cada 1800 alumnos no terminan la secundaria,
¿qué probabilidad tiene un alumno de no ser bachiller?, ¿y de ser bachiller?

Solución: s = 540 y n = 1800, entonces :
s/n = 540/1800 = 3/10 ***probabilidad de no ser bachiller*** y como 1800 - 540 = 1260 logran terminar su bachillerato, entonces :
s = 1260 y n = 1800, entonces: $\frac{s}{n} = \frac{1260}{1800} = \frac{7}{10}$ probabilidad de ser bachiller.

La probabilidad te permite analizar y estudiar los procesos aleatorios, es decir, son procesos que te permiten concluir de diversas maneras sin que sea posible conocer el resultado exacto de cada caso en particular.

Un experimento aleatorio puede ser:

***** Lanzamiento de un dado una sola vez.***

Si lanza un dado cien veces siempre tendrás la incertidumbre en cuanto a cuál será el resultado de tu próximo lanzamiento.

***** Peso de una persona.***

En el caso de determinar el ***peso*** de una persona tienes incertidumbre antes de pesarla, porque después de pesada tiene un peso relativo que ya conoces.

***** El estado del tiempo atmosférico en el día de mañana, etc.***

El estado del tiempo es cada día diferente, la situación de mañana no volverá a repetirse, siempre hay incertidumbre sobre el estado del tiempo de mañana.

En los casos probables tienes dos situaciones: a ***priori*** y ***posteriori***,aunque también se consideran las situaciones subjetivas.

La probabilidad ***canónica*** o ***a priori*** fue ideada por Laplace y está sustentada en el siguiente principio:

"Si un experimento aleatorio puede concluir de n maneras posibles y m de esas n maneras tienen una característica de evento o suceso [E], entonces la probabilidad del Evento ***P[E] = m÷ n"***

$$P[E] = \frac{m \rightarrow \text{Número de casos favorables}}{n \rightarrow \text{Número de casos posibles}}$$

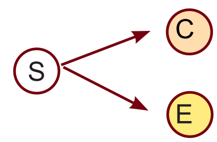
Observa esta moneda, si la tiras al aire puede caer de una de esas dos maneras. Cara, Escudo

C E :

¿Cuál es la probabilidad de que caiga “escudo”?
n = 2 y m = 1, entonces:

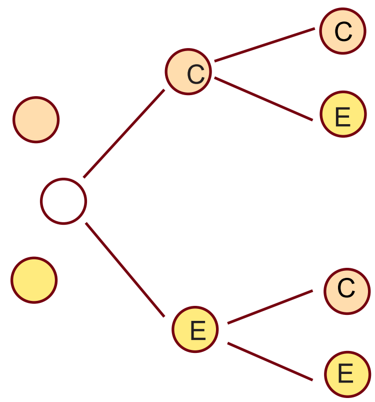
$P[E] = m/n = 1/2 = 0.5$

El conjunto de resultados de un experimento aleatorio es su ***Espacio Muestral***, entonces el ***Evento o suceso*** es un sub-conjunto del Espacio Muestral. Lanza una moneda una vez y obtienes:



El espacio muestra S = {c, e} donde A = {c} $\wedge$ B = {e} son eventos.

Si lanzas la moneda dos veces, obtienes: El espacio muestral es: S = {cc,ce, ec, ee}, A= {ce, ee} y B = {cc, ce}



El principio de probabilidad a posteriori se debe a ***Richard Von Mises***, y trata de medir la frecuencia con que ocurre un evento, para predecir como ocurrirá.

En la ***probabilidad subjetiva*** es necesario que un ***Evento A*** tenga un *“grado de creencia”*, por lo que puede: P[A] =0 representa que el ***Evento A*** no ocurra, P[A] = 1 representa que el ***Evento A*** si ocurra y 0 < P[A] < 1 es que el evento ocurrirá.

La ***esperanza matemática*** es también un punto de la probabilidad, que nace con el juego de azar, y se determina con el producto de lo que un jugador apuesta por la probabilidad de que gane :

*** ¿Cuál es tu esperanza matemática, si quieres ganar $15.00, al lanzar una moneda equilibrada y apuestas a “escudo” ?

Solución: La probabilidad P[A] = ½, entonces la esperanza matemática es 15 (½) = 7.50

La ***Esperanza Matemática*** es: $Em = x_1P[A] + x_2P[A_2] + ...+ xP[A_n]$

*** Si compras uno de los boletos de una rifa de 1000 boletos, cuyo primer premio es un radio cassette que vale RD$560.00, su segundo premio es un radio con valor de RD$200.00 y en tercer premio un CD con valor de RD$60.00. ¿Cuál es tu esperanza matemática?

Solución: Como en la rifa únicamente hay tres premios ganadores, esto significa que 997 premios no ganan, entonces : los 1000 boletos pagarán 560 + 200 + 60 = 820, lo que significa que la esperanza matemática es : 820/1000 = 0.82 y 997/1000 = 0.997 x 100 = 99.7% representa el porcentaje en que no ganarías nada.. El porcentaje de ganar el primer premio es: $\frac{1}{1000}$ x 100 = 0.1%.

En promedio puedes ganar: 0(0.997) + 560(0.001) + 200(0.001) + 60(0.001) = 0.82

Es el momento de practicar lo aprendido

1. En un juego de 52 cartas quieres sacar un AS y un 10 ¿Qué probabilidad tienes?

Solución: Las cartas tienen 4 ases y 4 diez, por tanto : P[A] = AS y P[B] = 10, entonces,
$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ por lo que P[A] = 4/52 y P[B] = 4/52, luego :
= 4/52 + 4/52 = 8/52 = 0.15385

2. Tienes un espacio muestral con 6 fichas S = {1,2,3,4,5,6}. Determina la probabilidad que al elegir una ficha represente un número múltiplo de 2 ó múltiplo de 3.

3. Tiras un dado: ¿Qué probabilidad tienes de lazar un número par ? ¿impar ?

4. Si sacas una estrella morada de una urna te ganas un premio de RD$1,000.00 y la urna tiene 6 estrellas moradas y 4 blancas. ¿Cuál es tu esperanza matemática?

5. Tienes 5 bolas rojas, 3 blancas y 12 moradas: ¿Qué probabilidad tienes de que la bola extraída al azar sea : a. Roja b. Morada c. Blanca.

6. Si de un experimento se pueden obtener 15 resultados distintos, todos con la misma oportunidad, ¿qué probabilidad tiene uno de ellos en particular ?

7. Si P(A) = 2/3, ¿qué es P(no A) ?

8. Si P(no A) = 4/7, ¿qué es P(A) ?

9. Si P(A) = 4/5 ¿qué es P(~A)

10. Si tu probabilidad de sacar 90 en el examen de matemática es 3/8, ¿cuál es la probabilidad de obtener 90 o más en la prueba?

11. Si una caja tiene 7 boletas moradas, 5 blancas y 4 azules. Si extraes una boleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la boleta sea : 1. morada? 2. blanca ? 3. roja? 4. morada o blanca? 5. morada o roja? 6. blanca o roja?

12. En la clase por tutoría de la Prof. Laura hay 35 alumnos: 20 estudian matemática pero no español; 10 estudian español pero no matemática y 5 estudian matemática y español; si escoges un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie matemática y español ?

13. En el tramo del colmado hay 3 potes de salsa, 8 de aceitunas, 2 de alcaparras y 10 de aceitunas y alcaparras. Si eliges un pote al azar, ¿cual es la probabilidad de que sea un pote de aceitunas o un pote de alcaparras ?

14. Escribe en un papelito los números del 1 al 10. Si introduces 10 papelitos en una funda y sacas uno al azar, ¿Cuál es la probalidad de que el número sea mayor que 5? ¿mayor que 8 o menor que 3? ¿menor que 6 o divisible por 7 ?

15. Si tienes el Espacio muestral de los eventos A y B, completa la siguiente tabla:

E.Muestral	A	B	A ∩ B	P(A)	P(B)	P(A ∩ B)	P(A ∪ B)
20	5	8	7	¼	2/5	7/20	3/10
20	6	4	5				
25	15	8	2				
25	10	7	5				
30	18	12	4				
30	20	6	0				
40	25	10	5				
40	18	24	2				
45	25	15	2				

BIBLIOGRAFIA

Allen R. (1969). Introducción a la Matemática Moderna. Madrid, España, Aquilar.

Aron, A. & Aron, E.N. (2001). Estadística para psicología (2da. ed.) Buenos Aires, Argentina: Pearson Education.

Asesores y Consultores (1996). Lógica y Conjuntos. Santo. Domingo, República Dominicana: Algoritmos.

Barnett, R.&Kearns, T. (1994) Matemáticas - Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Interamericana.

Chao, L. (1994). Esdatística para las Ciencias Administrativas. Tercera Edición México D.F., México: McGraw-Hill.

Cohen, M. & Nagel, E. (1968). Introducción al Método Científico I y II. Buenos Aires, Argentina:Amorrortu.

Cummins, J. Kenney, M., Kanold, T. (1988). Informal Geometry. Columbus, Ohio: Merril.

Dolciani, M., Berman, S., Freilich, J. (1980). Algebra Moderna I (14ava. Ed.). México, D.F., México: Publicaciones Culturales.

Dunn, D.S. (2001). Statistics and data analysis for the behavioral sciences. New York, New York: McGraw-Hill.

Foster, . Cummins, . Yunker, . (1987). Geometry. Columbus, Ohio: Merrill.

Franco, R. (1964). Didáctica del Algebra, la Geometría y la Trigonometría. Medellín: Bedout.

Freund, J. Willims, F. Perles, B. (1990). Estadísticas para la Administración. México, D.F., México: McGraw Hill Hispanoamericana.

Glaser, A.N. (2001). High-Yield TM Biostatistics (second edition). Philadelphia, Pensilvania: Lippincot Williams & Wilkins.

González, R. A. (1988)Tercera Ed.]. Santo Domingo, Rep. Dominicana.

Hays, W. L. (1988). Statistics (fourth edition). Orlando, Florida: Holt Rinehart and Winston.

Jurgensen, R., Dommelly, A., Dolciani, M., (1978). Geometría Moderna. México, D.F., México: Publicaciones Culturales.

Keshava, B. (1991) Herbolario Tropical. Caracas, Venezuela: Texto. ,

Klinger, F. (1965) ¿El Algebra? ¡Pero si es muy fácil! Barcelona: España: Técnicas.

Levin, R. (1988) Estadística para Administradores. Hispanoamericana, S. A. Segunda Edición. México

Lipschulz A. (1969). Teoría de Conjuntos y Temas Afines. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill Interamericana.

Londoño, N. Bedoya, H. (1996). Algebra y Geometría. 8 y 9 (Décima ed.). Bogotá, Colombia: Norma.

Marcos, C. Martínez, J. (1965). Física y Química. Madrid, España: S M.

Mendenhall, W. Reinmuth, J. (1981). Estadística para Administración y Economía México D.F., México: Grupo Editorial Iberoamericana.